

数学ソフトウェアを使ってみよう

大阪教育大学 数理科学講座 菅原邦雄

近年、多くの数学関係ソフトウェアが開発され利用できるようになってきた。特に、画像表示に優れたソフトは、抽象的な数学理論の結果を直感的に表示してくれるので、教育において活用が期待できる。証明をコンピュータに完全に任せることはできないが、複雑な計算もコンピュータにさせることができるので、数学の研究においても実験的手法をとりれることが可能になってきた。

1 数学関係のソフトウェア (注* フリーソフト)

- (1) 数式処理ソフトウェア (Mathematica, Maple, Maxima* など)
人間が紙と鉛筆でするように数式を計算する。結果を図示することも出来る。
- (2) 数値解析ソフトウェア (MATLAB, Scilab*, GNU Octave*, FreeMat* など)
科学技術計算に利用されている。
- (3) 対話型幾何ソフトウェア (CabriGeometry II Plus, KSEG*, KidsCindy* など)
マウス操作でコンピュータの画面上に点、直線、円などの図形を作図する。中点、垂線、平行線、などを描く機能をもっている。垂直、対称などの関係を保ったまま作図した図形を動かすことができるので、図形の性質をよく理解できる。
- (4) その他 GRAPES* : 関数のグラフ表示と解析のソフトウェア
TEX* : 数式の入った文章の作成に適した組版システム

2 フリーソフトの宝箱 KNOPPIX/Math

2.1 KNOPPIX/Math の概要

KNOPPIX/Math は数学のためのコンピュータ環境である。ドイツの Klaus Knopper 氏が開発した KNOPPIX (<http://unit.aist.go.jp/itri/knoppix/>) に多数のフリーソフトウェア (TEX, Maxima, Geomview, Macaulay2, KidsCindy, KSEG... など) を組み込んだもので、福岡大学の濱田氏を中心に開発されている。パソコンに KNOPPIX/Math DVD を入れて起動するだけで、組み込まれたフリーソフトウェア使うことができる。インストールや設定作業は特に必要がない。OS には Linux (リナックス) が採用されている。設定変更をしなければ、すべてがメモリー上で行われハードディスクにはアクセスしないので、KNOPPIX/Math を終了して DVD を取り出せばパソコンは元の状態に戻っている。Windows 上で使える仮想マシン版も用意されている。

KNOPPIX/Math <http://www.knoppix-math.org/wiki/>

仮想マシン版 <http://www.math.kobe-u.ac.jp/vmkm/vmkm-ja.html>

また、教育用途版 (<http://www.alpha.co.jp/biz/products/knoppix/edu/>) もある。

2.2 KNOPPIX/Math の操作法：起動から終了まで

- (1) 準備：パソコンの電源を入れた時にハードディスクより先に DVD から立ち上がるように設定しておく（パソコンのマニュアル参照）
- (2) 起動：DVD ドライブに KNOPPIX/Math の DVD をセットしてから、パソコンの電源を入れる（Windows で使用している状態で、DVD ドライブに KNOPPIX/Math の DVD をセットして再起動しても同じである）。
- (3) 正常に KNOPPIX から起動すれば左上にペンギンマークが出て、画面に Linux の設定状態がカラフルに一行一行表示される。
- (4) Linux の起動が正常に終わると、KNOPPIX/Math と右下に表示され、システムサービス初期化のウィンドウがでる。それが済むと、画面左に各種アイコン、画面下にメニューバーが表示される。

左にあるアイコンをクリックすると

KNOPPIX-Math-Start 収録ソフトの解説・起動へのリンクが表示される

knoppix-math DVD 中の Math-ja フォルダが表示される。

KNOPPIX [ja] KNOPPIX の説明が読める。

- (5) 下の \sqrt{x} メニューをクリックすると各種数学ソフトが表示されるので、どれかを選んでクリックするとそれが起動する。各ソフトの終了は Windows と同じ操作でできる（ソフトの窓の右上の \times をクリックすればよい）。
- (6) KNOPPIX の終了

下のメニューの左端の [K] ログアウト コンピュータの停止

KNOPPIX の終了処理が順次表示される。何もせずにじっと待っていると、DVD が排出される。「CD を取り出して return key を押せ」と出るが、何もしなくても 2 分たつと電源が切れるので、DVD を取り出す。

3 汎用計算機代数システム：Maxima

3.1 Maxima の入手とインストール

公式ホームページ (<http://maxima.sourceforge.net/>) からダウンロードできる。「5.18.1-Windows」などというリンクが windows 用である。実際にダウンロードするのは「maxima-5.17.0.exe」というファイルである。なお、数字はプログラムの更新に伴って随時変わる。

ダウンロードしたファイル (maxima-5.18.1.exe コンピュータによっては末尾の「.exe」は表示されないこともある) をダブルクリックするとインストールが開始される。

3.2 Maxima(Windows 版)：基本操作

Maxima には、入力方法と画面への表示が違うもの (wxMaxima, xmaxima, コマンドライン版 maxima など) がある。

- (1) wxMaxima の起動：「スターとメニュー」から
「すべてのプログラム」 「maxima-5.17.0」 「wxMaxima」
を選ぶ。

- (2) 計算式の入力 (version によって異なる。)

wxMaxima(version 0.8.0 の場合)

```
/*
wxMaxima 0.8.0 http://wxmaxima.sourceforge.net
Maxima 5.17.0 http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp GNU Common Lisp (GCL) GCL 2.6.8 (aka GCL)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
```

この部分でマウスの左ボタンをクリックすると、上の英文の下に横線が現れ入力できる状態になる。キーボードから式を入力すると、左側に [> >] が現れ入力したものが表示されて行く。

式を入力して(最後にセミコロン ; を入力後) Shift キーを押しながら Enter キーを押すと計算が実行される。Enter キーを押すと改行されるだけで計算は実行されない。複数行にわたって計算式を入力したいときは、Enter キーだけを押して改行すればよい。すべての入力が終わった後、(最後にセミコロン ; を入力後) Shift キーを押しながら Enter キーを押すと計算が実行される。

文末にセミコロンではなくドルマーク \$ をつけると(計算はされるが) 実行結果の出力が省略される。

- (3) 計算結果の出力

行頭に (%i1) があるのが入力の内容, (%o1) が対応した出力結果を表している。入力と出力には、計算の進行に伴って自動的に通し番号が付けられる。

計算結果は %o1 などのように書けばその後の計算で参照することができる。直前の計算結果は % で参照できる。

- (4) 入・出力画面の下のボタン

下のボタンを押すと、直前の計算結果(%) に対してコマンドが実行される。例えば「Simplify」を押すと、ratsimp(%); が入力され、実行される。必要に応じてデータ入力用の窓が開くこともある。simplify,ratsimp,trigsimp などの違いについては 3.3(6) を参照のこと。

3.3 Maxima : 入力の書式

- (1) 演算の記号と順序: 加 +, 減 -, 乗 *, 除 / の優先順位は数学と同じである。優先して計算したい箇所は括弧 () で囲む。乗法を Mathematica のように空白で代用することはできないので、必ずアスタリスク * を記入する。

例 $(x+1)*(x+2)$, $2*x^2+3*x*y$ (^ はべき乗を表す)

- (2) 代入: 変数に式や値を代入するときはコロン : を使う。

例 $y:(x+1)*(x+2)$

- (3) 関数の定義: 関数を定義するにはコロン・イコール := を使う。

例 $f(x):=3*x+1$

(4) 基本的な定数と関数

円周率 π	%pi	べき乗 x^4	x^4 または x^{**4}	平方根	sqrt()
自然対数の底 e	%e	階乗 $4!$	$4!$	絶対値	abs()
無限大 ∞	inf	実部	realpart()	指数関数	exp()
虚数単位 i	%i	虚部	imagpart()	自然対数	log()

三角関数	sin(), cos(), tan()
逆三角関数	asin(), acos(), atan()
双曲線関数	sinh(), cosh(), tanh()

(5) その他の関数など

書式	意味
ev($n*(n+1)/2$, $n=10$)	$n=10$ のときの $n*(n+1)/2$ の値を求める
float(%pi)	(%pi の値を) 浮動小数点表示で 16 桁返す
fpprec:20; bfloat(%pi);	(%pi の値を) 浮動小数点表示で 20 桁返す
sum(i^2 , i , 3, 9)	$\sum_3^9 i^2$
nusum(i^2 , i , 1, n)	$\sum_{i=1}^n i^2$ ($= n(n+1)(2n+1)/6$)
limit($(1+n)/n$, n , inf);	$\lim_{n \rightarrow \infty} (1+n)/n$ ($= 1$)

(6) 式の計算 (展開・因数分解・簡略化)

書式	意味
expand()	展開
factor()	因数分解
simplify()	簡略化
ratsimp()	有理式の簡略化
trigsimp()	三角関数や指数関数を含む式の簡略化
trigreduce()	三角関数の積を減らして簡略化
trigexpand()	加法定理や倍角の公式を使って展開

(7) 代数方程式

代数方程式	solve(方程式, 変数)
連立方程式	solve([方程式 1, 方程式 2, ...], [変数 1, 変数 2, ...])

(8) 微積分

	入力	説明
微分	diff($2*x^2+3*x*y$, x);	x に関して微分
2 階微分	diff($2*x^2+3*x*y$, x , 2);	x に関して 2 回微分

不定積分	<code>integrate(3*x^2+6*x*y, x);</code>	x に関して不定積分
定積分	<code>integrate(3*x^2+6*x*y, x, 0, 2);</code>	x に関して0から2まで積分
数値積分	<code>romberg(2*cos(x^2+3*x), x, 1, %pi);</code>	x に関して1から π まで数値積分
テイラー展開	<code>taylor(sin(x), x, 0, 5)</code>	x に関して $x=0$ のまわりで5次まで展開

(9) 1階または2階の常微分方程式

常微分方程式	<code>ode2(式, 未知関数, 独立変数)</code>
--------	----------------------------------

例 1. `ode2(diff(f(t), t)=2*f(t), f(t), t)`
積分定数は `%c, %k1, %k2` であらわされる。

初期条件の与え方	1階常微分方程式 <code>ic1(f(t), t=0, f(0)=f0)</code> 2階常微分方程式 <code>ic2(x, t=0, x=x0, 'diff(x, t)=v0)</code>
----------	--

例 2. `ic1(ode2(diff(f(t), t)=2*f(t), f(t), t), t=0, f(0)=a0)`

例 3. `ode2(diff(f(t), t)=2*f(t), f(t), t)` で解を求めた後、初期条件を `ic1(% , t=0, f(0)=a0)` で与えることもできる。

(10) ベクトルと行列

	入力の書式
ベクトル (x_1, y_1, z_1)	<code>[x1, y1, z1]</code>
内積	<code>[x1, y1, z1].[x2, y3, z2]</code>
行列 $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$	<code>matrix([x1, y1, z1],[x2, y2, z2],[x3, y3, z3])</code>
行列 A の行列式	<code>transpose(A)</code>
行列 A の逆行列	<code>A^-1</code>
行列 A と行列 B の積	<code>A.B</code>

ベクトル $[x_1, y_1, z_1]$ の第1成分は `v[1]` で取り出せる。

内積と行列の積はピリオド `.` を使う。

A に行列を代入するには

`A : matrix([x1, y1, z1],[x2, y2, z2],[x3, y3, z3])`

と書けばよい。このとき、A の第 (1,2) 成分は `A[1,2]` で取り出せる。

列ベクトル $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ は `x:matrix([x1],[x2])` で入力できる。

(11) Mathematica との相違点: コマンドは小文字で始まり、括弧は `[]` の代わりに `()` を使う。定数も小文字で始まり `%` を前につける。

3.4 Maxima : グラフ表示

Maxima では2次元グラフや3次元グラフを表示できる。実際には、外部プログラム gnuplot を利用して表示している。出力された3次元グラフはマウスでドラッグして視点を変えることができる。表示されている画像は `gnuplot graph ウィンドウ` 上部の青色のバーでマウスの右ボタンを押(して離)すとメニューが出るので、マウスを option まで下ろすと、コピー、印刷などの操作が選べる。

グラフの種類	書式	説明
2次元グラフ	<code>plot2d(f(x), [x, a, b])</code>	$f(x)$ のグラフを $a \leq x \leq b$ の範囲で描く
3次元グラフ	<code>plot3d(f(x,y), [x, a, b], [y, c, d])</code>	$f(x,y)$ のグラフを $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ の範囲で描く

助変数表示された平面曲線

```
plot2d( [parametric, cos(t), sin(t), [t, 0, 2*%pi], [nticks, 50]] )
```

曲線 $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ の $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲を分点数が 50 となる折れ線で描く

助変数表示された曲面の書式

```
plot3d ([cos(x)*(3 + y*cos(x/2)), sin(x)*(3 + y*cos(x/2)),
        y*sin(x/2)], [x, -%pi, %pi], [y, -1, 1], [grid, 50, 15]);
```

[grid, 50, 15] の数値を変えると曲面表示の粗密が変わる。

```
plot3d ([cos(x), sin(x), 2*x], [x, -%pi, %pi], [grid, 50, 15]);
```

注意 1 `gnuplot graph ウィンドウ` を閉じないと次の計算ができない。

注意 2 `plot2d`, `plot3d` の代わりに `wxplot2d`, `wxplot3d` を使うと入力ウィンドウ内に表示される。その表示サイズは `wxplotsize` の値を変更することで変えられる。`wxplotsize` の値を横 400 × 縦 500 にするには、`wxplot2d`, `wxplot3d` の前に `wxplotsize:[400,500]` を入力すればよい。

注意 2 `vxmaxima` で入力画面の下のボタン `Plot 2D`, `Plot 3D` を押して出てくる窓の中の、`Formt` で `inline` を選べば、`wxplot2d`, `wxplot3d` が実行され入力画面内にグラフ表示される。

4 対話式幾何学ソフトウェア : KSEG

4.1 KSEG の入手とインストール

<http://www.mit.edu/~ibaran/kseg.html> から `kseg-0.401.zip` をダウンロードする。

Windows 環境で、`kseg-0.401(.zip)` をダブルクリックすると、`kseg-0.401` フォルダが見えるので、それをハードディスクにコピーする。コピーしたフォルダの中の `KSEG(.exe)` をダブルクリックすると使える。英語モードから日本語モードへの変更は、file メニューから `Choose Language` を選択し、`kseg_ja.qm` を開く。

4.2 KSEG でできること

- (1) 作図： 交点、線分、中点、半直線、直線、平行線、垂線、円、円弧、角の2等分線、軌跡、多角形・扇形・弧形・円などの塗りつぶし

- (2) 計測： 距離、長さ、半径、角度、比率、傾き、面積、
- (3) 計測した数値の間の計算：
- (4) 図形の変形：平行移動、線対称移動、拡大・縮小、回転
- (5) 画面の移動・拡大・縮小
- (6) 依存関係の変更

注：作図された幾何学的対象物（オブジェクト）や計測結果などにはラベルが自動的に付与されている。

4.3 KSEG 初歩の初歩（正三角形の作図）

- (1) KSEG を起動すると（各種メニューや作図ボタンが上部にある）白いスケッチウインドウが現われる
- (2) スケッチウインドウの中心で右ボタンをクリックすると点 A が構成される。
- (3) スケッチウインドウの異なった位置で SHIFT キーを押しながら右ボタンをクリックすると点 B が出来る。SHIFT を押したままで点 A は非選択にならないので、この操作の後でも二点が選択されたまま（赤色）である。
- (4) ”New/Circle By Center And Point”（新規/中心点と点で円）をメニュー から選ぶと、点 A を中心として点 B を通る円が生成される。この円が出現すると選択された状態（赤色）になり、点 A と B は非選択となる。
- (5) 何もない位置で左ボタンをクリックする。すると、何も選択されていない状態になる。次に、点 B の位置で左ボタンをクリックしてこの点を選択する。さらに、点 A の位置で SHIFT を押しながら左ボタンをクリックしてこれも選択する。
- (6) メニューから再度”New/Circle By Center And Point”（新規/中心と点）を選択すると、点 B を中心とし、点 A を通る円が構築される（先に選択したものが中心になる）。
- (7) SHIFT を押しながら、最初に生成した円をクリックする。そうすれば、両方の円が選択された状態（赤色）になる。
- (8) ”New/Intersection Points”（新規/交点）をメニューから選ぶ。二つの円の交点で二つの点が現われ、それらの両方が選択されている。
- (9) 点 A の位置で左ボタンをクリック点 A を選択すると点 A だけが選択された状態になる。次に、SHIFT を押しながら、点 B と上の交点の1つの位置で左ボタンをクリックする。すると3点が選択された状態（赤色）になる。メニューから”New/Segment”（新規/線分）を選ぶ。これで点 A,B と交点の1つを頂点とする正三角形が得られる。
- (10) それから、左マウスボタンを押しながら三角形の頂点を引き回してみよう。どの頂点を持って引き回すかによって、KSEG で何が出来るか様子がわかる。

作図操作は、作図のためのデータ（図形等）を選択したあと作図するという手順になっている。また、点や円を選択すると、そのデータから何が作図できるかメニューバーに図示される。そのボタンを左クリックしても作図できる。

4.4 操作の基本

マウスの操作

右ボタンをクリック	点の作図
左ボタンをクリック	幾何学的対象の選択 （選択されたものは赤色に、可能な操作がハイライト）

幾何的対象を選択した後、それらに関して作図、計測、変形等の操作をメニューから行なう。一部の操作は専用のボタンメニューが用意されている。

複数のものの選択方法

- (1) Sift キーを押しながらマウスの左ボタンで順次クリックする。
- (2) マウスの左ボタン押したままドラッグして破線の長方形を描きマウス左ボタンを離すと、長方形の中に含まれていたものがすべて選択される。

選択した順序に意味がある 例：3点 BAC をこの順に選択して角を指定すると角 BAC が選択される。

選択の解除：何もないところで左ボタンをクリックする。

操作のやり直し：Ctrl キーを押しながら Z キーを押す。

4.5 メニューの概要

ファイルメニュー

作図・作図構成手順（コンストラクション）の保存・コピーと読み込み

編集メニュー

作図のやり直し、図形・ラベルの表示・非表示、図形の線・色・フォントの変更
図に注釈を入れたければ、点を作図してそのラベルを注釈の文章に変更・表示。日本語は使えない。

View メニュー（作図画面の移動・拡大・縮小）

Pan(画面全体の移動)：左マウスボタンを押してドラッグすると作図画面全体が移動

Zoom(画面の拡大・縮小)：マウスカーソルが虫眼鏡に変化する(スケッチ領域の上にある時)。左マウスボタンを押しながら上にマウスを上引っ張れば拡大、下に引っ張れば縮小になる。拡大・縮小はマウスボタンが押された点を中心として行われる。マウスボタンを離せば通常の描画に戻る。

Zoom to Fit：拡大・縮小を行なって、視野に嵌る様にする。

Original Zoom：拡大率を 100% に戻す。

新規メニュー：作図

作図のための幾何学的対象物の選択と可能な作図

2点	線分、半直線、直線、円	1点と線分(半径)	円
2つの直線・円、円と直線など	交点	線分	中点
3点	(3本の)線分・半直線・直線、円弧、角の二等分線、多角形	軌跡として得られた曲線との交点は取れません。	

計測メニュー

計測のための幾何学的対象物の選択と可能な計測

2点	距離	3点	角度	線分	長さ、傾き	円	半径、円周
----	----	----	----	----	-------	---	-------

計測した数値の間の計算：(計測メニューの)計算

計算式を選び、入力したい位置にカーソルを移動して、計測値や計算値の数値をマウスの左ボタンでクリックする。数値・加(+）・減(-)・乗(*)・除(/)や式

もキーボードから入力することができる。入力後 OK ボタンを押すと計算結果が作図画面に表示される。

変形メニュー

変形に必要なデータ (黄色で表示される)	
平行移動	ベクトル
対称移動	対称軸
回転	中心と回転角
拡大・縮小	中心と倍率

データの指定	
1点	中心
2点	ベクトル
3点	回転角
線分	対称軸
2線分	割合(拡大・縮小の比率)
計測値または計算結果	回転の角度、割合
データの解除 選択を解除	

変形の方法：必要なデータが指定された状態で図形を選択して、平行移動・対称変換・拡大・回転を行う。

例 4.1 点対称 (180 度の回転)

- (1) 線分を描き中点を作図し、すべての選択を解除
- (2) Shift キーを押し状態で、線分上の 3 点を端から順に選択し、(変形メニュー) 角度を選択すると回転角 (180 度) が黄色く表示される。
- (3) 回転の中心にしたい位置でマウスの右ボタンをクリックし、(変形メニュー) 回転の中心を選択すると、その点が黄色く表示される。
- (4) 回転したい図形を選択し (変形メニュー) 回転を選択すると、180 度回転された図形が描かれる。

例 4.2 計測と計算：重心は三角形の頂点と対辺の中点を結ぶ線分を 2 : 1 に内分する。

- (1) 三角形を描く。2 本の中線を描き交点 (重心) を作図する。
- (2) 三角形の頂点と重心を選択
- (3) メニューから「計測」 「距離」
- (4) 重心と対辺の中点との距離を計測
- (5) 計測値の大きい方を選択
- (6) メニューから「計測」 「計算」
- (7) カーソルを行末に置き $\frac{y}{x}$ ボタンを押す
- (8) 先ほどの計測値の小さい方を選択
- (9) 計算ウィンドウの「OK」をクリック

4.6 拘束と軌跡

拘束と解除

図形は作図された順に依存関係が有る。例えば、線分上に点を描くと、その点は線分上のみ動かすことができる。

Ctrl キーを押しながら線分上の点を左ボタンでドラッグして線分からはずすと「線分上にある」という拘束が解除される。

Ctrl キーを押しながら点を左ボタンでドラッグして線分上で持ってくると「線分上にある」という拘束ができる。

Ctrl キーを押しながら点を左ボタンでドラッグして他の点に重なると 2 点が一致する (1 点になる)。

Ctrl キーを押しながら交点を左ボタンでドラッグして他の位置に移動すると交点ではなくなる。

図形を子図形や孫図形に依存させることは出来ない。

軌跡

先に定義されたもの（親）を（その持っている制約条件の下で）動かしたときに、それに依存したもの（子孫）が動いて出来る図形を描く。

依存関係にある2つの幾何学的対象の選択 軌跡

軌跡として得られた曲線との交点は取れません。

例 4.3

- (1) 線分 AB 上に点 C をとる。
 - (2) 中心 A 半径 AC の円と、中心 C 半径 CB の円の交点（の1つ）を P とする。
 - (3) 2点 C, P を選択して、新規メニューから軌跡を選ぶ。
（8の字形が描かれたボタンでもよい）。
- C が線分 AB を動くときの P の軌跡が得られる。

例 4.4 楕円は2点からの距離の和が一定である点の軌跡である。

- (1) 線分 AB 上に点 C をとる。
- (2) 2点 A, C を選択して線分 AC を作図する。同様に線分 CB を作図する。
- (3) 半径 AC の円を点 D を中心に描き、半径 CB の円を点 E を中心に描く。
- (4) 2つの円の交点（の1つ）を P とする。
- (5) 2点 C, P を選択して、新規メニューから軌跡を選ぶ。

注：線分 AC を選択するには、線分 AC の位置で何度かマウスの左ボタンのクリックする。

例 4.5 直線族の包絡線としての楕円の作図

- (1) 2点 A、B を描く。
- (2) 点 A を中心とし点 B を通る円を描く。
- (3) 円周上に点 C を、円内に（中心とは別の位置に）点 D をとる。
- (4) 線分 CD を選択して中点 E を作図する。
- (5) 線分 CD の垂直二等分線（E を通る CD の垂線）を描く。
- (6) (5) の垂直二等分線と点 C を選択して、新規メニューから軌跡を選ぶ。

4.7 構築と再帰

定型的な作図手順は、保存して再利用が可能である。また、作図の中で自分自身を呼び出して再帰的に繰り返して利用することもできる。

作図手順の構築 (construction) の保存と利用例（外接円の作図）

- (1) "File/New Construction" (ファイル/新規コンストラクション) で右側に作図手順用の枠のついた作図画面を開く。
- (2) 3点 A, B, C を描く。
- (3) A, B, C を選択して、それらを "Construction/Make Given" (コンストラクション/既知オブジェクトに変更) で "既知のもの (Given)" にする。
- (4) 線分 AB と BC、それらの中点 D, E を描く。

- (5) Dを通る AB の垂線と E を通る BC の垂線の交点 F (外心) を描く。
- (6) 中心点を F とし点 A を通過する円 (外接円) を描く。
- (7) 「外接円と最初の 3 点 A,B,C」以外の全ての対象を選択し、「Edit/Hide Objects」(編集/オブジェクトを隠す) を選び、外接円と最初の 3 点 A,B,C 以外を隠す。
- (8) 「File/Save as」(ファイル/名前をつけて保存) を選び名前をつけて保存する。
- (9) 「File/New Sketch」(ファイル/新しいスケッチ) で新しいスケッチを生成して、そこに 3 点を描き、その 3 点を選択状態にして、「Play/Untitled」(再生/クイック再生) を選択して、先ほど保存したファイル (~.sec) を選択すると、保存した作図手順が 3 点を初期値として実行される。

注 (9) で選択された 3 点は、(3) で既知オブジェクトに設定されたものに、選択された順に対応する。対応するものを間違っても選択しても実行されるが、そのときは期待通りの結果にはならない。

再帰を利用した構築の利用例 (ベジェ曲線)

- (1) 「File/New Construction」(ファイル/新規コンストラクション) で右側に作図手順用の枠のついた作図画面を開く。
- (2) 3 点 A,B,C を描く。
- (3) 線分 AB と BC、それらの中点 D,E を描く。
- (4) 線分 DE と、その中点 F を描く。
- (5) A,B,C を (この順に) 選択して、それらを「Construction/Make Given」(コンストラクション/既知オブジェクトに変更) で「既知のもの (Given)」にする。
- (6) A,D,F を (この順に) 選択して、それらを「Construction/Loop」(コンストラクション/再帰) で「再帰」の起点に設定にする。
- (7) F,E,C を (この順に) 選択して、それらを「Construction/Loop」(コンストラクション/再帰) で「再帰」の起点に設定にする。
- (8) 4 点 A,B,C,F 以外の全ての対象を選択し、「Edit/Hide Objects」(編集/オブジェクトを隠す) を選び、隠す。
- (9) 「File/Save as」(ファイル/名前をつけて保存) を選び適当な名前 (~.sec) をつけて保存する。
- (10) 新しいスケッチを「File/New Sketch」(ファイル/新しいスケッチ) で生成して、そこに 3 点を描き、その 3 点を選択して「Play」(再生) で先ほど保存したファイルを選択すると、何回実行するか聴いてくるので回数を入れる。(6)(8) で選んだ点が (5) の初期値として再帰的に実行され、ベジェ曲線が描かれる。

4.8 作図例

kseg-0.401 フォルダの examples の中には各種の作図例 (~.seg, ~.sec) がある。ファイルメニューから開いて見ると、作図の詳細が理解できる。

作図例 1 三角形の外接円、内接円を作図せよ。

作図例 2 (定点と定直線から等距離にある点の軌跡)

- (1) (定) 点とそれを通らない (定) 直線を作図する。
- (2) A を端点とし B を通る半直線上に点 C をとる。

- (3) 定点から AC の長さだけ離れた点の全体 (円になっている) を作図する。
- (4) 定直線から AC の長さだけ離れた点の全体 (直線になっている) を作図する。
- (5) (3) で作図した円と (4) で作図した直線の交わりを求める。
- (6) 点 C と交わりの 1 点で軌跡を求める。

作図例 3 (Astroid 1)

- (1) 直交する 2 直線 l_1, l_2 を作図する。
- (2) (定) 線分 AB を作図する。
- (3) 直線 l_1 上の点 C を中心とし半径 AB の円を作図する。
- (4) (3) の円と直線 l_2 の交点の 1 つを D とする。
- (5) 点 C と線分 CD で軌跡を作図する。

作図例 4 (Astroid 2)

- (1) AB を直径とする円 (中心を O とする) 上に点 C をとる。
- (2) 点 C, O, A をこの順に選択し、回転移動の (黄色の) 角に指定する。
- (3) 点 O を選択し、回転移動の (黄色の) 中心に指定する。
- (4) 点 B を (選択し、) 3 回回転した点を D とする。 ($\angle DOB = 3\angle COA$)
- (5) 直線 AB と直線 CD の交点を E とする。
- (6) 直線 AB の点 O での垂線と直線 CD の交点を F とする。
- (7) 直線 CD を隠し、線分 EF を作図する。
- (8) 線分 EF と点 C で軌跡を作図する。

5 参考資料

(1) 数式処理ソフトウェア

横田 博史 著「はじめての Maxima」工学社 2006 年 ISBN : 9784777512010

はじめての Maxima

<http://www.bekkoame.ne.jp/~ponpoko/KNOPPIX/MaximaBook.pdf>

Maxima で遊ぼう

<http://www.bekkoame.ne.jp/~ponpoko/Math/maxima/MaximaMAIN.html>

(2) 数値解析ソフトウェア

Scilab(日本語 ホームページ)** <http://www.scilab.org/ja/>

GNU Octave <http://www.gnu.org/software/octave/>

FreeMat <http://freemat.sourceforge.net/>

(3) 対話型幾何ソフトウェア

KidsCindy** <http://www11.atwiki.jp/kidscindy/>

(4) 関数のグラフ表示と解析のソフトウェア

GRAPES <http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/>

(5) 数式の入った文章の作成に適した組版システム

TeX** <http://oku.edu.mie-u.ac.jp/~okumura/texwiki/>

注 : ** の付いたものは日本で開発されたものや日本語の解説書が充実しているもの。

Maxima サンプル

次の計算例を順に入力して計算を実行してください。

- (1) `5+7;`
- (2) `3^100;`
- (3) `float(%);` %は直前の計算結果を表す
- (4) `fpprec:50;bfloat(sqrt(10));` 50桁の概数表示
- (5) `(3+4*i)^10;`
- (6) `expand(%);`
- (7) `factor(70612139395722186);`
- (8) `integrate(sin(x),x);`
- (9) `integrate(sin(x),x,0,%pi);`
- (10) `romberg(sin(x),x,0,%pi);` 数値積分なので誤差が出る
- (11) `plot2d(sin(exp(x)),[x,0,%pi]);`
 GNU プロットの画面を閉じないと次の計算ができない
- (12) `plot2d([parametric,2*cos(t),sin(t),[t,0,2*pi]]);`
- (13) `plot3d(sin(x+sin(y)),[x,-3,3],[y,-3,3]);`
- (14) `plot3d([u*sin(t),u*cos(t),t/3],[t,0,10],[u,-1,1]);`
- (15) `wxplot3d([u*sin(t),u*cos(t),t/3],[t,0,10],[u,-1,1]);`
- (16) `ratsimp(1/(x+1)+1/(x-1));`
- (17) `simplify(1/(x+1)+1/(x-1));` 計算せずにそのまま返す
- (18) `trigsimp(sin(x)^3+sin(x)*cos(x)^2);`
- (19) `solve(x^3-x^2-x-15=0,x);`
- (20) `solve([x+y=1,x-2*y=2],[x,y]);`

KSEG 作図課題

作図課題 1 4.3 KSEG 初歩の初歩 (正三角形の作図) (p.7) の作図を行ってください。

作図課題 2 三角形の外接円を作図してください。作図できたら (画面のどこかに受講番号を線画で描いておき) ファイルメニューから印刷を選んで印刷してください。

作図課題 3 三角形の内接円を作図してください。

作図課題 4 例 4.3 の作図を行ってください。

作図課題 5

- (1) 例 4.5 の作図を行ってください。
- (2) (1) とは別画面で例 4.5(3) の点 C を円外にとって作図を行ってください。
- (3) (2) の作図結果において点 C を円内にドラッグするとどうなるか確認してください。

作図課題 6 例 4.2 の作図と計算を行ってください。

作図課題 7 (Detloid)

- (1) AB を直径とする円 (中心を O とする) を小さく作図する。

- (2) 円上に点 C をとる。
- (3) 点 C, O, A をこの順に選択し、回転移動の (黄色の) 角に指定する。
- (4) 点 O を選択し、回転移動の (黄色の) 中心に指定する。
- (5) 点 B を (選択し、) 2 回回転した点を D とする。 ($\angle DOB = 2\angle COA$)
- (6) 直線 CO と (1) の円との C 以外の交点を E とする。
- (7) 点 C を中心とし、CE を半径とする円を作図する。
- (8) 直線 CD と (7) の円との交点を FG とする。
- (9) 直線 CD を隠し、線分 FG と点 C で軌跡を作図する。

作図課題 8 再帰を利用した構築の利用例 (Bezier 曲線) の作図を行ってください。 (p.11)

作図課題 9 例 4.5 の (6) 以降を次のように変更して作図してください。

(6) (5) の垂直二等分線と AC の交点を求め F とする。

(7) 点 C と点 F で軌跡を求めよ。

(このとき、 $AF+FD=AF+FC=AC$)

点 C を円外にドラッグするとどうなるか確認してください。

作図課題 10 直線族の包絡線としての放物線の作図

- (1) 点 A を始点とし B を通る半直線を描き、半直線上に点 C を描く。
- (2) この半直線への垂線を点 A で描く。
- (3) 垂線上に点 D をとる。
- (4) 線分 CD を選択して中点 E を作図する。
- (5) 線分 CD の垂直二等分線 (E を通る CD の垂線) を描く。
- (6) (5) の垂直二等分線と点 D を選択して、新規メニューから軌跡を選ぶ。

作図課題 11 上の課題の (6) 以降を次のように変更して作図してください。

(6) 半直線への平行線を点 D で描く。

(7) (5) の垂直二等分線と (6) の平行線の交点を求め F とする。

(8) 点 D と点 F で軌跡を求めよ。

(このとき、 $CF=FD$)

作図課題 12 直線族の包絡線としての楕円の作図 1

次の作図をしてください。

- (1) 点 A, B を直径とする円を描く。
- (2) 円内に (中心とは別の位置に) 点 C を、円周上に点 D をとる。
- (3) D を通る CD の垂線を作図する。
- (4) (3) の垂線と点 D を選択して、新規メニューから軌跡を選ぶ。

作図課題 13 例 4.4 の作図を行ってください。

作図課題 14 双曲線は 2 点からの距離の差が一定である点の軌跡である。

- (1) 点 A, B を通る直線上 (の線分 AB の外) に点 C をとる。
- (2) 線分 AC, 線分 BC を作図する。
- (3) 半径 AC の円を点 D を中心に描き、半径 BC の円を点 E を中心に描く。
- (4) 2 つの円の交点 (の 1 つ) を P とする。

(5) 2点 C,P を選択して、新規メニューから軌跡を選ぶ。

注：点 D,E を近づけ、点 C をドラッグして線分 AB 上に持ってくると例 4.4 になる。

作図課題 15 直線族の包絡線としての双曲線の作図

(1) 点 A, B を直径とする円を描く。

(2) 円外に点 C を、円周上に点 D をとる。

(3) D を通る CD の垂線を作図する。

(4) (3) の垂線と点 D を選択して、新規メニューから軌跡を選ぶ。

注：点 C をドラッグして円内に入れると作図課題 12 になる。

作図課題 16 (Detloid2)

(1) AB を直径とする円 (中心を O とする) を小さく作図する。

(2) 円上に点 C をとる。

(3) 点 C, O, A をこの順に選択し、回転移動の (黄色の) 角に指定する。

(4) 点 O を選択し、回転移動の (黄色の) 中心に指定する。

(5) 点 B を (選択し、) 2 回回転した点を D とする。 ($\angle DOB = 2\angle COA$)

(6) 点 C を \overrightarrow{OC} 移動した点を E とする。

(7) E を中心に半径 EC の円を描く。

(8) 直線 CD と (7) の円と (C とは異なる) 交点を F とする。

(9) 直線 CD を隠し、点 F と点 C で軌跡を作図する。

作図課題 17 (放物線：再帰を利用した作図)

2 直線を描き、それぞれに等間隔に点 P_1, P_2, P_3, \dots , 点 Q_1, Q_2, Q_3, \dots を描く (間隔は直線で異なってよい)。直線 P_1, Q_1 P_2, Q_2 $P_3, Q_3 \dots$ を描く。これらの直線族の包絡線は放物線になっている。

(1) "ファイルメニュー" から "新規コンストラクション" を選択して作図画面を開く。

(2) 4 点 A, B, C, D を作図する。

(3) 2 点 A, C を選択し平行移動のベクトル \overrightarrow{AC} を指定。

(4) 点 C を選択し \overrightarrow{AC} だけ平行移動 (移動した点を E とする)。

(5) 変形メニューで選択を解除。

(6) 2 点 B, D を選択し平行移動のベクトル \overrightarrow{BD} を指定。

(7) 点 D を選択し \overrightarrow{BD} だけ平行移動 (移動した点を F とする)。

(8) 変形メニューで選択を解除。

(9) 2 点 E, F を通る直線を描く。

(10) Shift キーを押しながら、4 点 A, B, C, D をこの順に選択し、コンストラクションメニューで既知オブジェクトに変更。

(11) 何も無いところでマウスの左ボタンをクリックし全ての選択を解除。

(12) Shift キーを押しながら、4 点 C, D, E, F をこの順に選択し、コンストラクションメニューで再帰を選択

(13) ファイルメニューで名前をつけて保存。

(14) ファイルメニューから新規を選ぶ。

(15) 新しい作図画面に 2 直線 (l, m とする) を描く。

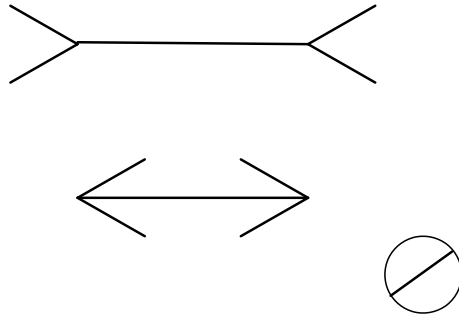
(16) 直線 l 上に 2 点 A, C をほんの少し離して作図。

(17) 直線 m 上に 2 点 B, D をほんの少し離して作図。

(18) Shift キーを押しながら、4点 A,B,C,D をこの順に選択し、”再生/クイック再生”で先ほど保存したファイルを選択すると、何回実行するか聴いてくるので回数を入れる。再帰描画が実行され、多数の直線が描かれる。

作図課題 18 (ミュラー・リヤー錯視)

線分の両端のひげは(直径と平行で)直径を回転させると開き方が変わるように作図してください。



作図課題 19 方べきの定理を KSEG の計算機能で確認してください。

作図課題 20 メネラウスの定理を KSEG の計算機能で確認してください。

作図課題 21 チェバの定理を KSEG の計算機能で確認してください。