授業案

テーマ

連立方程式の解と一次変換

目的

行列だけ教えているとどうにも無味乾燥なので、一次変換を教えたかった。
そこで、連立方程式の解の視覚化ということをテーマにして授業案を作った。

対象　３年生理系クラス

準備物

コンピュータ，ビデオプロジェクター
GRAPES および GRAPES のファイル neko1.gps, neko2,gps
プリント３枚（下記）

授業の進め方

１．まずプリント１を配って連立方程式の解を求めさせる。（ここでは復習のつもり）
２．一次変換のことを簡単に説明し，小沢ネコを描かせる。
（完全に描かせると，それだけで授業時間が終わってしまうので，適当に中断する）
３．プリント２を配り，生徒たちの描いたものと比べさせる。
いろいろな一次変換があることを，GRAPES を用いて見せる。（neko1.gps）
４．一次変換の像と逆像の概念を説明し，練習２を解かせる。
５．連立方程式の解を求めるということが，一次変換における逆像を求めることになっていることを確認する。（練習２⑵を解くときに，このことを暗黙のうちに使っている）
６．上記のことを確認するために，プリント２の図を用いて，連立方程式の解を求めさせる。（練習３）
７．行列式の値が０の時には，連立方程式は無数の解を持つか，解を持たないかのどちらかだが，それを一次変換で見せる。
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$による一次変換を，$a=-1$から$a=3$まで，0.5 ずつ増加させていく。（neko2.gps）

所要時間，50 分～60 分

プリント１　連立方程式の解と１次変換

● 連立方程式の解

連立方程式 $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ は，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ より，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に逆行列があるときは，

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ として求めることができます.

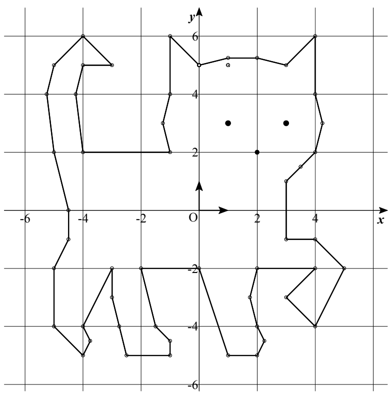
練習１　次の連立方程式の解を，逆行列を用いて求めよ.

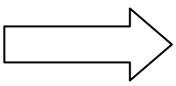
(1) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+4y=3 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x+y=2 \\ -x+2y=1 \end{cases}$

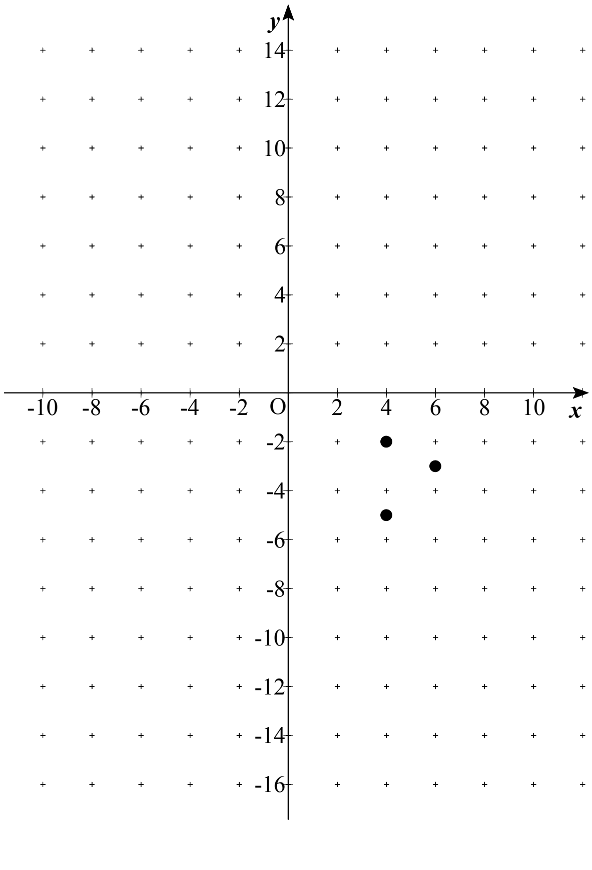
● １次変換

ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ からベクトル $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ への変換（移動）が，$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で表されるとき，この変換を１次変換と言います.

１次変換 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のイメージを描いてみましょう.

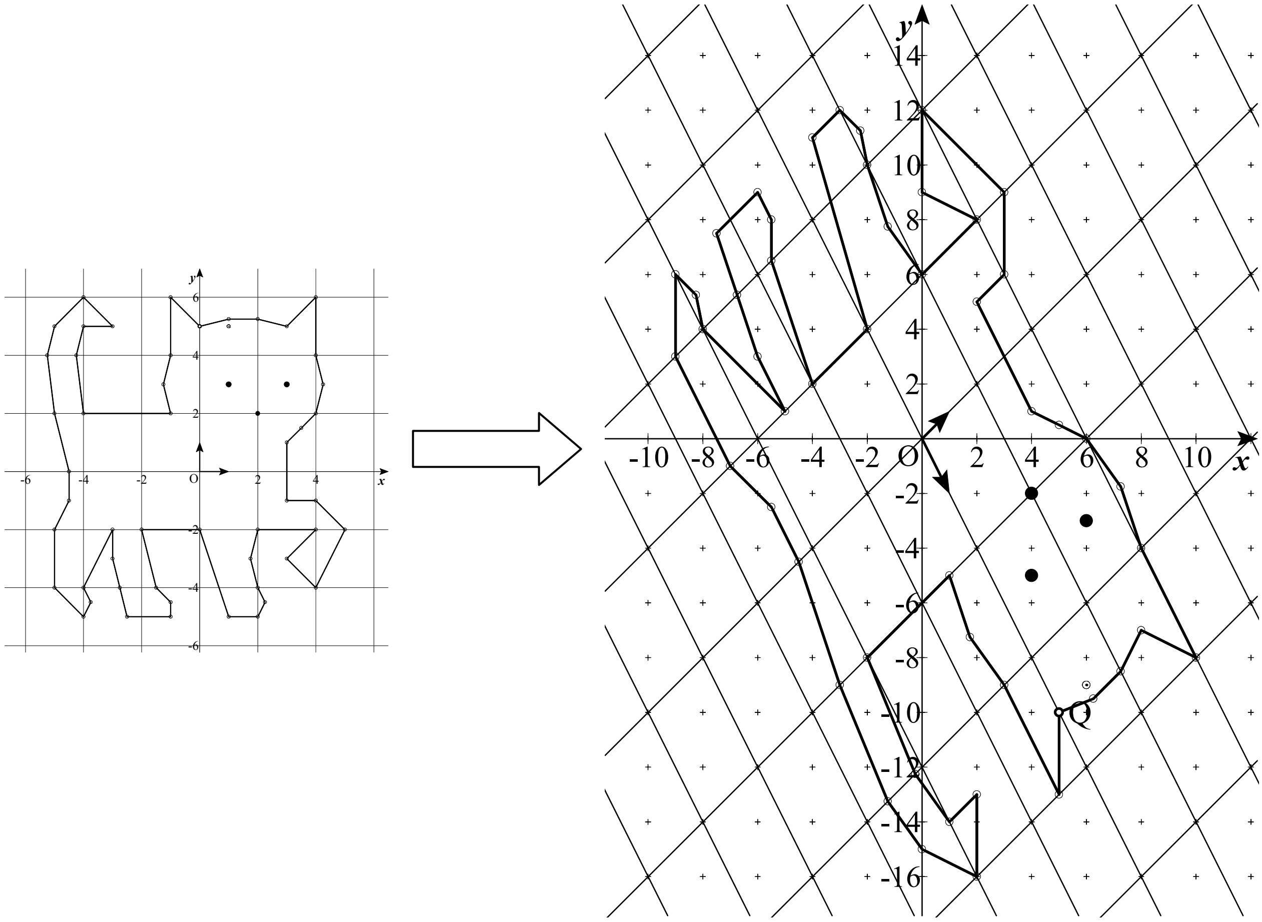






上記ネコは小沢健一先生の作で，
小沢猫として全国的に有名です.

プリント２　１次変換$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のイメージ



● １次変換の像と逆像

１次変換 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ において，ベクトル$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ はベクトル$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ に移されます.

このとき，$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の像と言い，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ の逆像であると言います.

例：１次変換 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ において，$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ であるから（ネコの口），ベクトル

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ はベクトル$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ に移される. よって，$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ の像は$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$で，$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ の逆像は$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ である.

練習２　１次変換 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ において，

(1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の像を求めよ.　　　　(2) $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ の逆像を求めよ.

プリント３

● 連立方程式の解と１次変換

方程式 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ の解を求めることは，

１次変換 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ において，ベクトル$\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ の逆像を求めることに他なりません．

練習３　図を利用して，次の方程式の解を求めてみよう．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -16 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}$

☆ 考えてみよう

連立方程式の解を図（ネコ）を用いて求めるのは，現実的ではありません．しかし，方程式を図で理解できるのは，数学的思考を進める上で大きな助けになります．では次のような場合，図ではどう考えたらいいでしょうか．

$ad-bc=0$ のとき，方程式 $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$ には，多くの解があるときと，まったく解のないときがあります．例えば，

$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=2 \end{cases}$ は無数の解がありますが，$\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=3 \end{cases}$ には解がありません．

どうしてでしょうか？

１次変換$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ において，ベクトル$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$の逆像を考えてみましょう．