

## 授業案

### テーマ

連立方程式の解と一次変換

### 目的

行列だけ教えているとどうにも無味乾燥なので、一次変換を教えたかった。  
そこで、連立方程式の解の視覚化ということをテーマにして授業案を作った。

### 対象 3年生理系クラス

### 準備物

コンピュータ, ビデオプロジェクター

GRAPES および GRAPES のファイル `neko1.gps`, `neko2.gps`

プリント3枚 (下記)

### 授業の進め方

1. まずプリント1を配って連立方程式の解を求めさせる。(ここでは復習のつもり)
2. 一次変換のことを簡単に説明し, 小沢ネコを描かせる。  
(完全に描かせると, それだけで授業時間が終わってしまうので, 適当に中断する)
3. プリント2を配り, 生徒たちの描いたものと比べさせる。  
いろいろな一次変換があることを, GRAPES を用いて見せる。(neko1.gps)
4. 一次変換の像と逆像の概念を説明し, 練習2を解かせる。
5. 連立方程式の解を求めるということが, 一次変換における逆像を求めることになっていることを確認する。(練習2(2)を解くときに, このことを暗黙のうちに使っている)
6. 上記のことを確認するために, プリント2の図を用いて, 連立方程式の解を求めさせる。(練習3)
7. 行列式の値が0の時には, 連立方程式は無数の解を持つか, 解を持たないかのどちらかだが, それを一次変換で見せる。

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ による一次変換を,  $a = -1$  から  $a = 3$  まで, 0.5 ずつ増加させていく。(neko2.gps)

所要時間, 50分~60分

● 連立方程式の解

連立方程式  $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$  は,  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$  より,  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  に逆行列があるときは,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

として求めることができます.

練習1 次の連立方程式の解を, 逆行列を用いて求めよ.

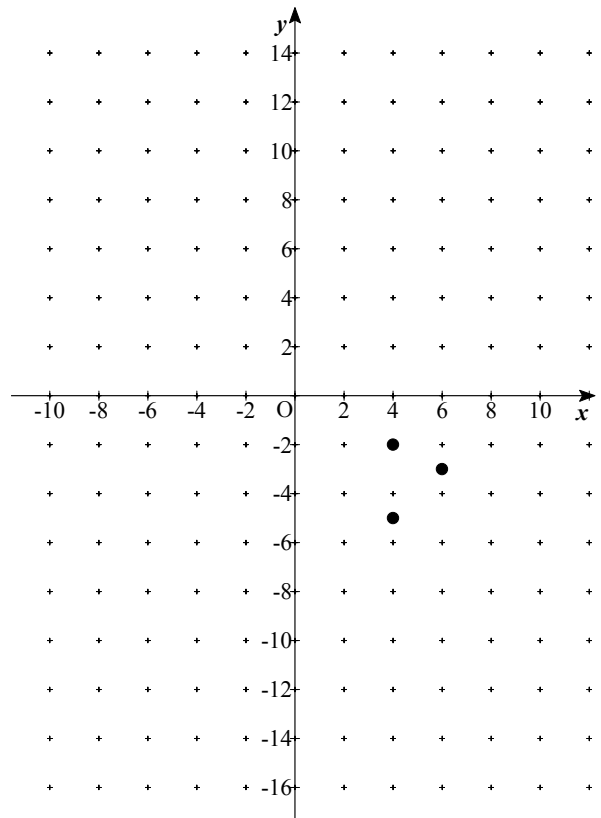
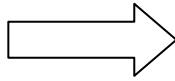
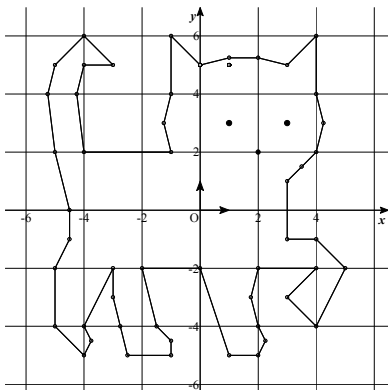
(1)  $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+4y=3 \end{cases}$

(2)  $\begin{cases} 2x+y=2 \\ -x+2y=1 \end{cases}$

● 1次変換

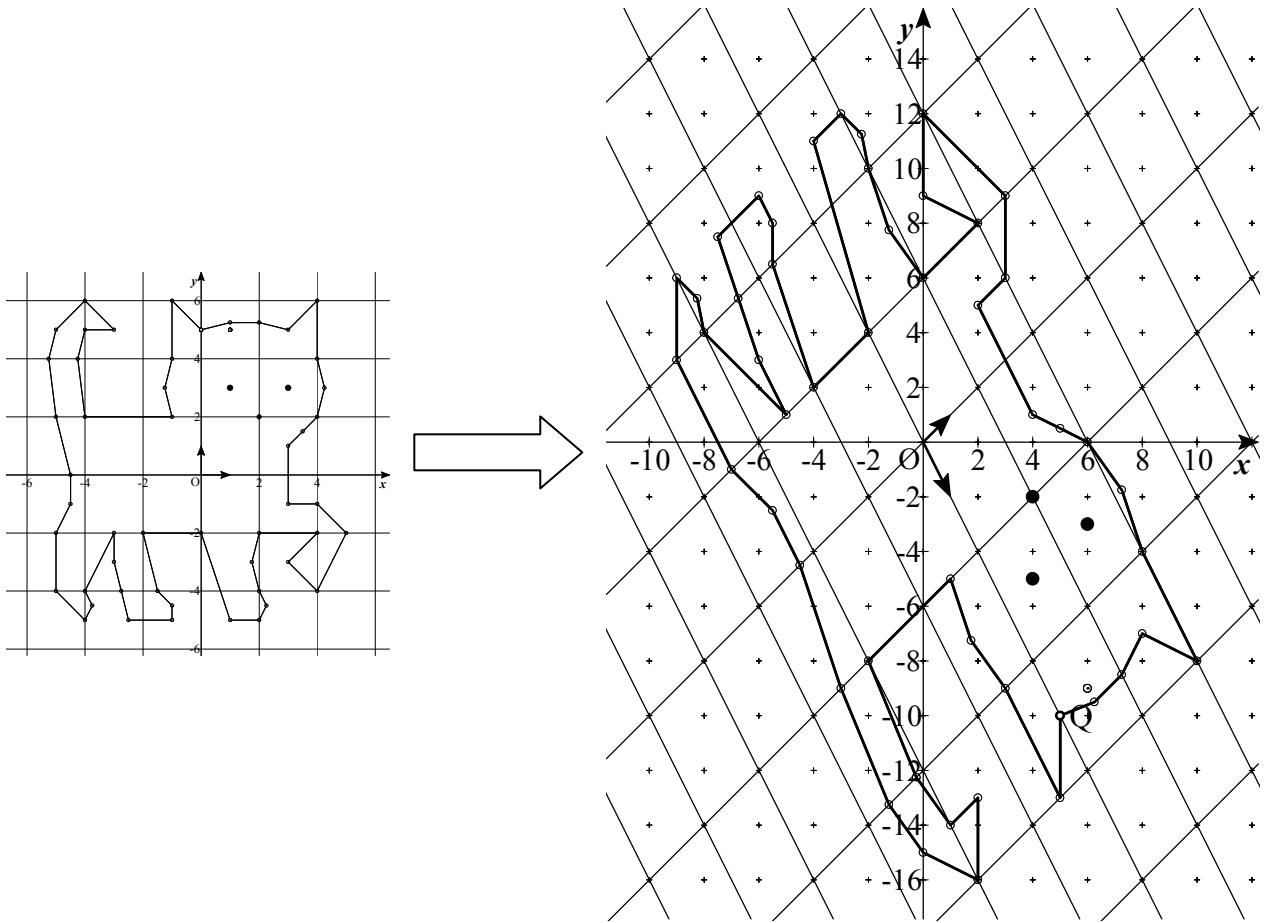
ベクトル  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  からベクトル  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  への変換(移動)が,  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  で表されるとき, この変換を1次変換と言います.

1次変換  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  のイメージを描いてみましょう.



上記ネコは小沢健一先生の作で,  
小沢猫として全国的に有名です.

プリント2 1次変換  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  のイメージ



● 1次変換の像と逆像

1次変換  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  において、ベクトル  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  はベクトル  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  に移されます。

このとき、 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  を  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  の像と言い、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  は  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  の逆像であると言います。

例：1次変換  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  において、 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  であるから（ネコの口）、ベクトル

$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  はベクトル  $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  に移される。よって、 $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  の像は  $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  で、 $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$  の逆像は  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  である。

練習2 1次変換  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  において、

(1)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  の像を求めよ。

(2)  $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$  の逆像を求めよ。

### プリント 3

#### ● 連立方程式の解と 1 次変換

方程式  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$  の解を求めることは,

1 次変換  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  において, ベクトル  $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$  の逆像を求めることに他なりません.

練習 3 図を利用して, 次の方程式の解を求めてみよう.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

#### ☆ 考えてみよう

連立方程式の解を図 (ネコ) を用いて求めるのは, 現実的ではありません. しかし, 方程式を図で理解できるのは, 数学的思考を進める上で大きな助けになります. では次のような場合, 図ではどう考えたらいいでしょうか.

$ad - bc = 0$  のとき, 方程式  $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$  には, 多くの解があるときと, まったく解のないとき

があります. 例えば,

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases} \text{ は無数の解がありますが, } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases} \text{ には解がありません.}$$

どうしてでしょうか?

1 次変換  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  において, ベクトル  $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$  の逆像を考えてみましょう.