GRAPESを利用した授業案

大阪教育大学附属高等学校池田校舎　友田 勝久

大阪教育大学教育実習生　森 堅詞，永田 義行

この指導案は，教育実習生の森，永田両君が研究授業のために作ったものに，友田が手を加えたものです．

対象：高等学校２年生

分野：数学II「図形と式」

テーマ

２直線 $tx+y=2, x-ty=0$ の交点の軌跡

目標

軌跡は点の運動や点集合として定義されている．しかし，実際に軌跡の方程式を求める場合，図形的な考察を行うことなく，式の操作のみで方程式を求めることがほとんどである．この場合，多くの生徒にとって，形式的な解法はわかっても，問題や解答の意味は理解できないままである．点の動きを具体的に調べればよいが, 手作業だけで行うと計算に多くの時間を費やすために授業の流れを損ねるという問題がある．

そこで，生徒との対話的授業の中でコンピュータを使って点の動きを表示することにより，問題の意味を視覚的に理解する手助けとするとともに, 式変形による解法が持つ意味を再評価できればと考えた．

既習事項

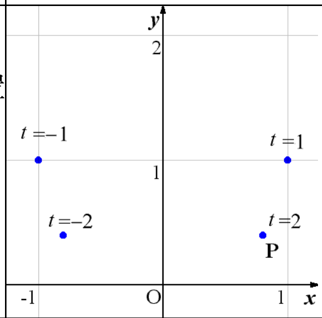
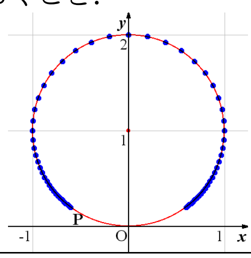
円の方程式，パラメータを含んだ点の軌跡

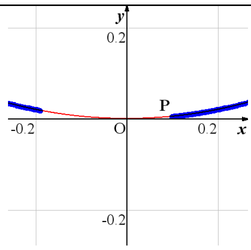
準備物

1．コンピューター（１台）：windows95/98/NT4.0が動作するもの
2．大型CRTもしくはビデオプロジェクター：上記コンピューターを接続する．
3．ソフトウェア：GRAPES
4．別紙プリント２枚

所要時間

60分

指導項目	指導内容	指導上の留意点
本時の予定	点の動きを調べながら軌跡を求めてみよう．	プリント１配布（資料１）
問題提起	２直線 $\begin{cases} tx+y=2 \\ x-ty=0 \end{cases}$ の交点 P の軌跡 （２直線の交点を求めるにはどうすればいいか？）	授業ではｔを消去して求めてきたが 今回はｘ、ｙの連立方程式と思って解いてみよう．
手作業	$t=1, t=2$ の場合について，直線を引いて交点を求めてみよう．	生徒に書かせる．
一般の場合	交点Pの座標をパラメーター t で表してみよう． （計算結果）$x=\dfrac{2t}{1+t^2}$, $y=\dfrac{2}{1+t^2}$	直線の方程式を x,y の連立方程式と考えて解く．
	上式を用いていくつかの t の値について，点 P の位置（座標）を調べて，図に書いてみる． GRAPESで点の座標を入力して，点を書いてみる． （点は残像が残るようにしておく）（資料２）	
コンピュータ ーシミュレーションで予想する．	「軌跡はどんな図形か？」→円？放物線？ t の値をいろいろ変えながらGRAPESで描いてい見せる． （例：$t=0$ から 3 までを 0.1 の刻みで描く．ついで，$t=0$ から -3 までを 0.1 の刻みで描く）（資料３） 円との応答あれば→だとすれば中心と半径は？ （中心（０，１），半径 １ ） 確認のために円を描いてみる．（資料４）	ここで，調べる t の値は，軌跡の形が円であることがはっきりわかるように選ぶこと． なお，t の絶対値を大きくするのは，後の「楽しみ」にとっておくこと． 
予想の確認	「計算で確かめてみよう．」 どうすれば確かめられるか生徒に質問する． １．その円の方程式は？ $x^2+(y-1)^2=1$ ２．点P の座標は？ $(x,y)=\left(\dfrac{2t}{1+t^2},\dfrac{2}{1+t^2}\right)$ ３．点P が円上にあるのを確かめるにはどうすればいいか？　方程式に代入して確かめればよい． ４．実際に代入して確認させる．	

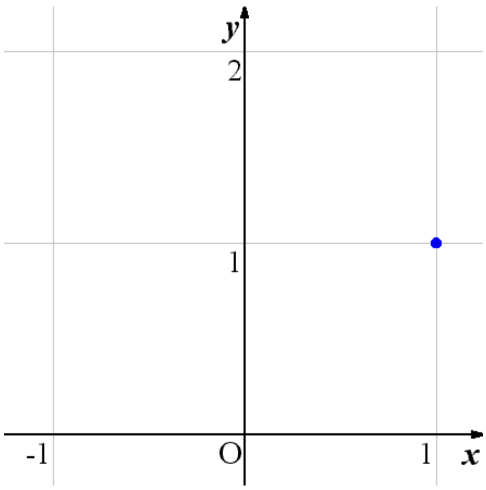
必要十分のチェック	「点P は円の上にあることがわかったが，点P は円上の点をくまなく動くのだろうか？ $t=3$ あるいは $t=-3$あたりから t の絶対値を大きくしていく．（資料５） t を大きくしても $(0,0)$ には到達しない． $t=10,100,1000$ としてみる．	 このあたりの説明には, 画面をズームしてみる．（資料６）
予想	「もしかして $(0,0)$ には到達しないのか？」 なぜ $(0,0)$ に到達しないのだろう？	
予想の確認	$\left(\dfrac{2t}{1+t^2},\dfrac{2}{1+t^2}\right)=(0,0)$ を満たす t が無いことを示す．	第１象限では $t>0$，第１象限では $t<0$ あるから，y 軸上では t は符号を持たないと考えられる． しかし，点 $(0,2)$ のとき， $t=0$ だから, 点 $(0,0)$に来る t の値はない．
交点の軌跡	交点の軌跡は，中心 $(0,1)$，半径 1 の円 （ただし，点 $(0,0)$ は除く）	除かれる点が原点だけかどうかの確認はしていない．しかし, 図を見れば他に無いことは明らかだ．

この後，プリント２（資料７）を配布して読ませる．（あるいは説明する）

（資料１）プリント１

２直線 $\begin{cases} tx+y=2 \\ x-ty=0 \end{cases}$ の交点 P の軌跡

1. $t=1, t=2$ の場合について，２直線を引いて交点を求めてみよう．



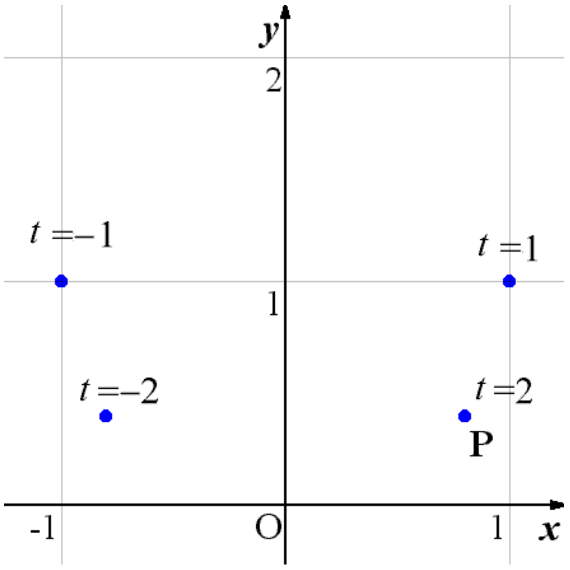
2. 交点をパラメーター t を用いて表してみよう．

3. 軌跡を予想してみよう．

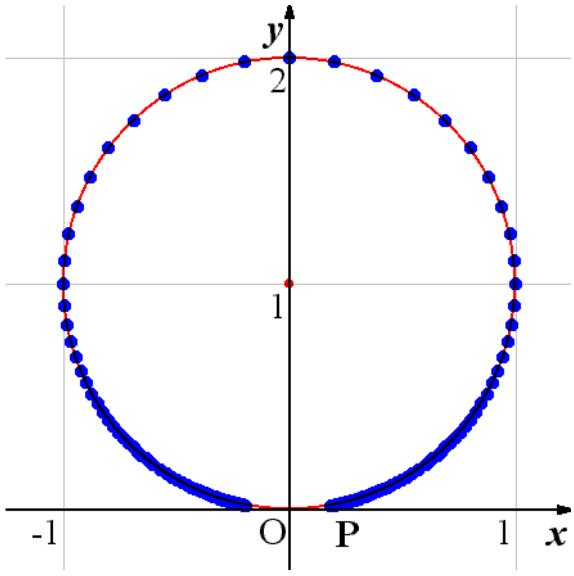
4. 予想の確認

5. それから．．．

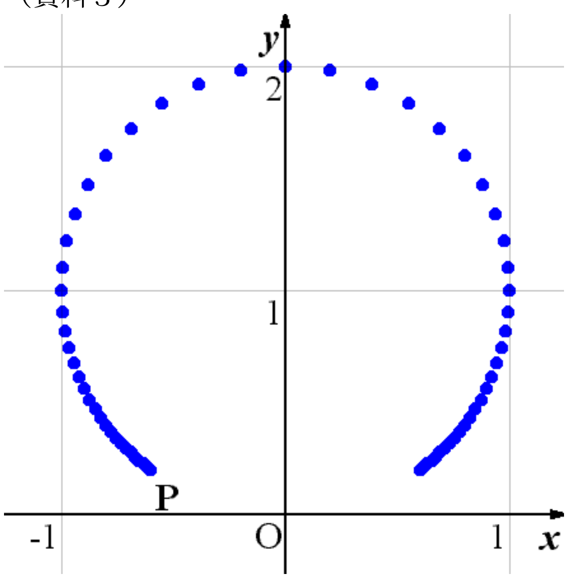
（資料２）



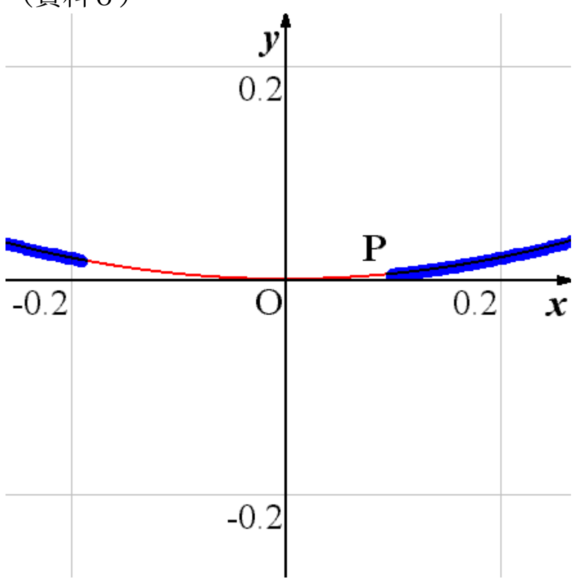
（資料５）



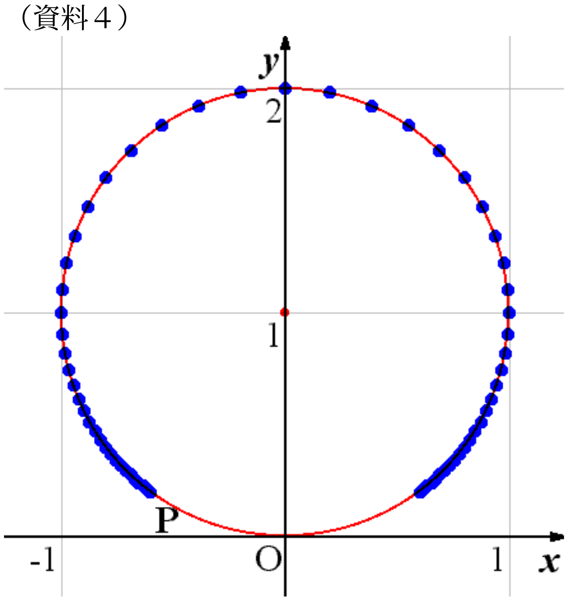
（資料３）



（資料６）



（資料４）



（資料７）プリント２

2直線の交点の軌跡

2直線 $\begin{cases} tx+y=2 & \cdots ① \\ x-ty=0 & \cdots ② \end{cases}$ の交点の軌跡

について考えてみよう．

軌跡の方程式を求めてみよう．

交点を$\mathrm{P}(X,Y)$とすれば，2直線①②は点Pを通るから，

$$\begin{cases} tX+Y=2 & \cdots ③ \\ X-tY=0 & \cdots ④ \end{cases}$$

が成り立つ．

（方針：求めたいのはXとYの関係だから，

③④からtを消去する．）

まず，④より，

$Y\neq 0$ のとき，

$$t=\frac{X}{Y}$$

これを③に代入して，

$$\frac{X}{Y}X+Y=2$$

分母を払って整理すると，

$$X^2+Y^2-2Y=0$$

よって，点$\mathrm{P}(X,Y)$の軌跡は，

円 $x^2+y^2-2y=0$．．．かな？．．．

ただし，$Y\neq 0$としているから，原点は除かれる．(右図参照)

まとめると，

$\underline{x^2+y^2-2y=0}$

（ただし，原点は除く）　・・・ (A)

一方，$Y=0$ のとき，③④より，

$$tX=2,\ X=0$$

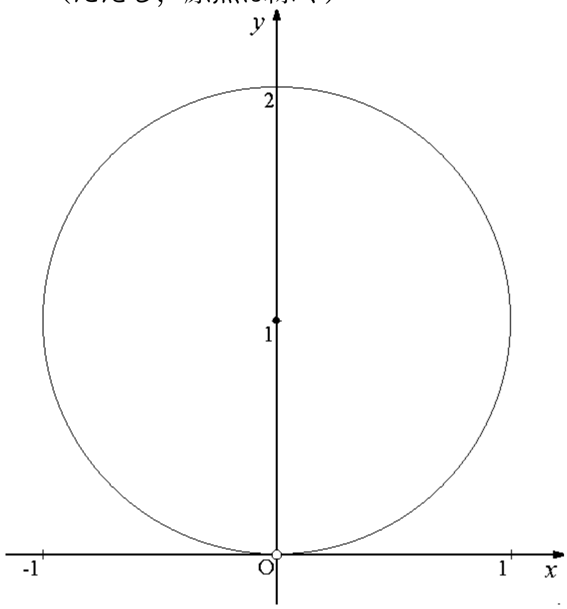
しかし，この条件を満たすtの値は存在しない．言い換えれば，

t がどのような値をとっても，$Y=0$になることはない．・・・ (B)

したがって，(A) , (B)より，Pの軌跡は，

円$x^2+y^2-2y=0$

（ただし，原点は除く）



補足

1．　Pを(X,Y)とせずに(x,y)とすれば,①②と③④は同じ式になるから省略でき，資源の節約になる．

2．　この証明では，交点は「円$x^2+y^2-2y=0$（ただし，原点は除く）」という図形上にあることを示しているが, この図形上のすべての点が交点であることは（明示的には）示しておらず，不備である．

. . . ところで. . .

2直線 $\begin{cases} tx+y=2 & \cdots ① \\ x-ty=0 & \cdots ② \end{cases}$ の交点の軌跡について,

円 $x^2+y^2-2y=0$ 上の点の中で，どうして原点だけが特別なのだろうか？

　2直線について実際の交点の位置を調べてみよう.

まず，$t=1$ のとき，2直線は

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$$

だから，交点は $(1,1)$

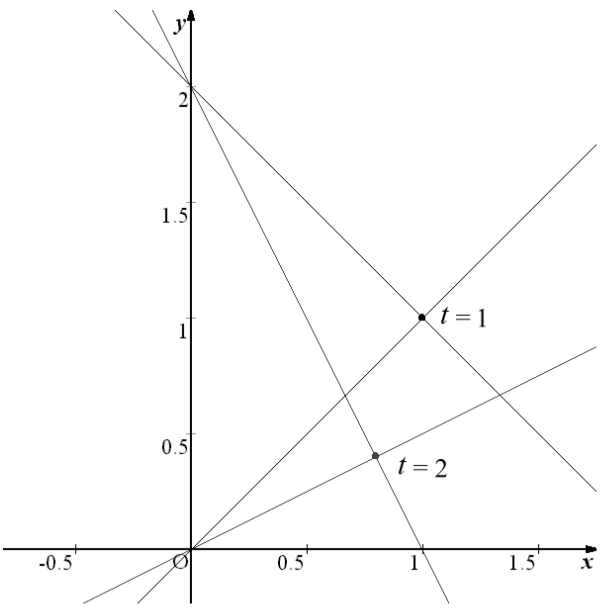
次に，$t=2$ のとき，2直線は

$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

だから，交点は $\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{2}{5}\right)$ となる.

この様子を図示したのが下図だ.

こんな風にして調べていくのは大変だから，①②から交点を求めてみよう.



x , y の連立方程式とみなせばよいから,

①×t+② より,

$$(t^2+1)x=2t$$

$$x=\frac{2t}{t^2+1}$$

また，①－②×t より,

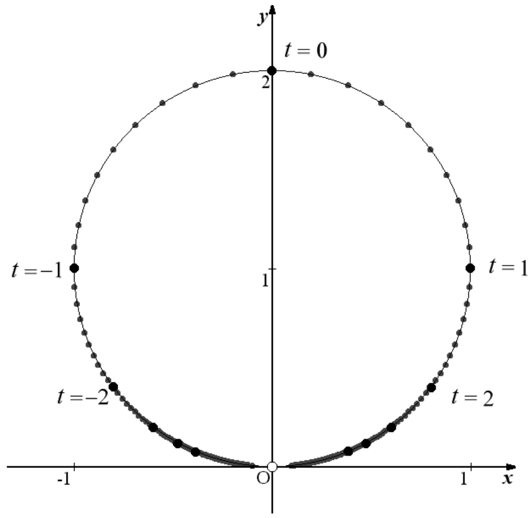
$$(t^2+1)y=2$$

$$y=\frac{2}{t^2+1}$$

よって,

$$(x,y)=\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{2}{1+t^2}\right)$$

これを用いて軌跡を描いてみると下図のようになる.



　t の値を定めると，2直線が定まり交点Pの位置が決まる．このときの t の値とPの位置の関係を示したのが上図である.

　t の絶対値を大きくしていくと，点P はいくらでも原点に近づくが，原点に重なることはない．これが，原点だけが軌跡から除かれる理由である.