GRAPESによる授業案（'93のものを若干修正した）

授業の展開

分野　　　　　　数学Ｉ　図形と式

対象　　　　　　１年生（２組）

授業の表題　　　放物運動による領域問題へのアプローチ

放物運動と軌跡（前回の授業，パソコンの利用，資料１）

自由落下運動　$y=-5t^2$　（$y=-\frac{1}{2}gt^2$ の近似）

投げ上げ運動　$\begin{cases} x=ut \\ y=vt-5t^2 \end{cases}$

$$y=\frac{v}{u}x-\frac{5}{u^2}x^2$$

初速度$20m/s$の時，どの角度に投げ上げるのがもっとも遠くへ届くか

$$\begin{cases} x=(20\cos\theta)t \\ y=(20\sin\theta)t-5t^2 \end{cases}$$

$y=0$　のとき　$t=4\sin\theta$ なので，$x=80\sin\theta\cos\theta$

シミュレーションでは，$40m$になりそう．

$$40-x=40-80\sin\theta\cos\theta$$
$$=40(1-2\sin\theta\cos\theta)=40(\sin\theta-\cos\theta)^2\geq 0$$

本時の授業内容

○　放物運動による領域問題へのアプローチ

　初速度$20m/s$でボールを投げ上げるとき，ねらった位置に当てるには，どのような角度で投げるとよいか．また，どうしても届かない位置がある．それはどのような範囲か．最終的な目標は，２次方程式の根，そして，判別式の利用である．パソコン・GRAPESの利用は，「通過領域→実数条件→判別式の利用」といった抽象的・形式的な論理や計算を，具体的なイメージによって身近なものにすると共に，シミュレーションによって授業に楽しさが加わればと考えた．

　なお，生徒には，本時のあらましを書いたプリントを配布した．これは，パソコン画面に映された映像は後に残らないという欠点を補う目的で行った．（資料２）

利用機器

パソコン

ビデオプロジェクター(映機工業 LC-5000)

ソフト

GRAPES

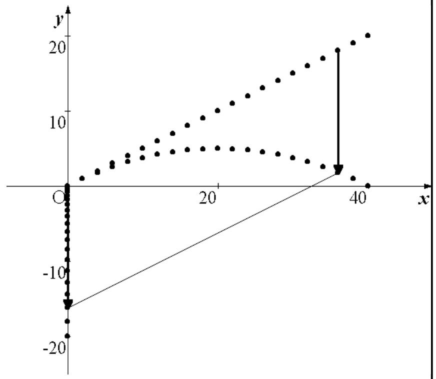
授業の構成

項目	指導内容	留意点	操作
前時の復習	初速度$20m/s$で角度θに投げ上げたボールの運動は, $\begin{cases} x=(20\cos\theta)t \\ y=(20\sin\theta)t-5t^2 \end{cases}$ ・・・①		
軌跡のシミュレーション	角度を変えるとボールの軌跡は変わる．では，どのような角度で投げ上げると，点A(20,10)を通るか？	生徒に答えさせ，シミュレーションしてみる．解は２つある．	(放物21)
軌跡の方程式	角度を求めるために,変数 t を消去する． $y=(\tan\theta)x-\frac{1}{80\cos^2\theta}x^2$ $=ax-\frac{1+a^2}{80}x^2 \quad (a=\tan\theta)$ これが軌跡を表す式だが，このグラフ上に点Aがあるとして解く．	$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ の公式は既習だが, $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ からの説明が必要かもしれない．	$a=1$ の場合について，結果を確認（放物運21に重ねがき）
シミュレーション結果の確認	では，点A(20,10)を通るときの aの値はいくらか？求めてみよう． $a=1,3$ 従って，三角比の表より, $\theta=45°,72°$	生徒に解かせる． パソコン画面で確認.	先程求めた式で結果を確認 (放物22)
計算だけで確かめる．	点B(20,15)や点C(30,10)はどうだろうか．a の値を求めてみよう．通れば根があるはず．あとで画面で確かめよう．	ここでの計算で, 根がある⇔通る 根がない⇔通らない ということに，気付いてくれないと後が苦しい．	求めた後でシミュレーション (放物22)
一般化	m の値による領域を調べる． 通過する範囲を求めてみる． 点(X, Y)に対して，m の２次方程式 $Y=mX-\frac{1+m^2}{80}X^2$ が実数根を持つとき，投げ上げたボールはこの点を通過することができる．したがって，判別式を調べれば，通過するかどうかがわかる． $X^2m^2-80Xm+(80Y+X^2)=0$ $D=(80X)^2-4X^2(80Y+X^2)\geq 0$ $Y\leq -\frac{1}{80}X^2+20$	曲線群を見せることで,「通過領域」と呼べるものがあることを示し，それと判別式との関連を導く． 求めた範囲を，画面上に図示して確かめる．	放物運22の色を残像色に変えて，曲線群を描く． グラフを描き加える． (放物23)

資料１　　（生徒に配るときは，グラフは印刷しない）

放物運動の軌跡

◆　**原点**(0,0)**にある点を斜めに投げ上げる．**



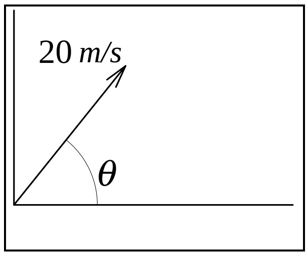
自然落下運動　　点P　$\begin{cases} x=0 \\ y=-5t^2 \quad (=-\frac{1}{2}gt^2) \end{cases}$

斜めに直進　　　点Q　$\begin{cases} x=20t \\ y=10t \end{cases}$

斜めの投げ上げ　点R　$\begin{cases} x=20t \\ y=10t-5t^2 \end{cases}$

点Rでは，t を消去すると　　$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{80}x^2$

◆　**秒速** 20 m **で投げたボールはどこまでとどくか？**



まっすぐ進むなら　$\begin{cases} x=20t\cos\theta \\ y=\ 20t\sin\theta \end{cases}$

でも重力で落ちるから　$\begin{cases} x=20t\cos\theta \\ y=20t\sin\theta\ -5t^2 \end{cases}$

どれくらいの高さまで上がるか？

$$\begin{aligned} y&=20t\sin\theta-5t^2 \\ &=-5(t^2-4t\sin\theta) \\ &=-5(t-2\sin\theta)^2+20\sin^2\theta \end{aligned}$$

したがって，角θで投げ上げた時，$20\sin^2\theta$ まで上がる．ここで

$$20\sin^2\theta\le 20$$

より，最高は,20 m

どの角度で投げるとき最も遠くへとどくか？

$y=0$ とおいて，

$$20t\sin\theta-5t^2=0 \quad より，\ t=0,4\sin\theta$$

したがって，

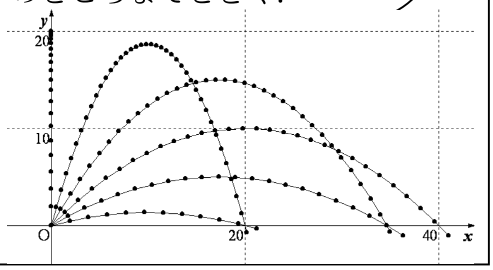
$$x=20t\cos\theta=80\sin\theta\cos\theta$$

シミュレーションの結果より，最大値は40と予想できる．

$$40-80\sin\theta\cos\theta=40(1-2\sin\theta\cos\theta)=40(\sin\theta-\cos\theta)^2\ge 0$$

等号の成立は，$\sin\theta=\cos\theta$ のときなので，$\theta=45°$

つまり，$\theta=45°$のとき，最遠点40 m のところまでとどく．



秒速 40 m **で投げるとどうなるだろうか？**

資料２　　（生徒に配るときは，グラフは印刷しない）

放物運動による領域

秒速 20 m で投げたボールがとどく範囲を調べてみよう．

$$\begin{cases} x = 20t\cos\theta \\ y = 20t\sin\theta - 5t^2 \end{cases}$$

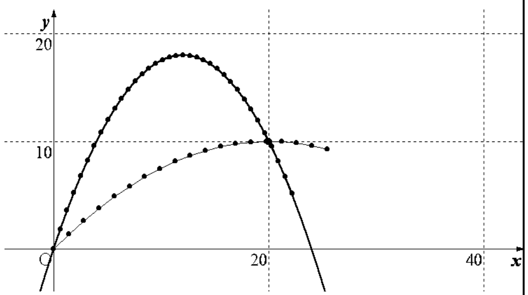
◆　どのような角度で投げると，点A(20,10)を通るか？

◆　角度を求めるために，まず変数t を消去する．

$t = \dfrac{x}{20\cos\theta}$　を　$y = 20t\sin\theta - 5t^2$　に代入して，

$$y = 20\cdot\frac{x}{20\cos\theta}\sin\theta - 5\cdot\left(\frac{x}{20\cos\theta}\right)^2$$

$=$



したがって，傾き a で投げ上げた時のボールの軌跡は，

$$y = ax - \frac{1+a^2}{80}x^2$$

◆　点A(20,10)を通るときのa の値を求めてみよう．

◆ a の値がいくらのとき，点B(20,15)や点C(30,10)を通るだろうか? あるいは，どんな a の値に対しても通らないのだろうか．調べてみよう．

◆　どのような点を通り，どのような点を通らないか？ その領域(範囲)を求めてみよう．