

デルトイドの接線に関する GRAPES 的考察

大阪教育大学附属高等学校池田校舎 友田勝久

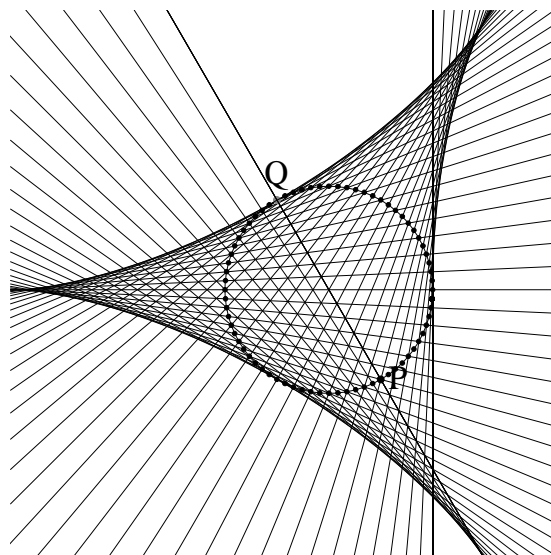
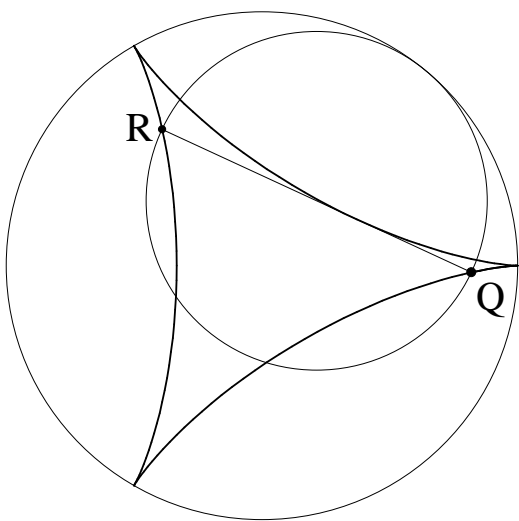
■ はじめに

コンピュータを利用していると、手作業では計算できない、あるいは描けないものを扱うことができるので、思わぬ発見に出会うことがある。とくに関数グラフツール GRAPES の場合、扱う対象が図形やグラフなので見ていてきれいな性質が多い。今回は、そのような発見^{※1}の中から、内サイクロイドのひとつ—デルトイドに関する性質を紹介する。

■ デルトイドと接線に関する不思議

半径 1 の定円の内側を回転する半径 $\frac{2}{3}$ の動円上の 1 点の軌跡をデルトイドというが、これを描くときに動円の直径も描画してみると、直径の両端はデルトイドの周上を動き、直径はデルトイドの接線になっていることに気がつく（下左図）。これは、デルトイドの弦のうち接線になっているものは長さが一定であることを示している。不思議な性質である。

これとは別に、正 n 角形の頂点を左回りに動く点 P と、それと逆方向に 2 倍の速さで動く点 Q があるとき、2 点を結ぶ直線 PQ による直線群を描くと、包絡線としてデルトイドが現れる。そして、 n が偶数のときには、直線は必ず 3 本ずつが 1 点で交わる（下右図）。これも不思議である。



以下では、この不思議の背後に潜む性質を、明らかにしていく。

^{※1} 残念ながら、多くは既知のものである。このような性質を、コンピュータグラフィックスなしに見つけた先人たちの知恵と努力には敬服するばかりである。

■ 転がる円の直径が作る包絡線

直線上を転がる円において、円周上の 1 点の軌跡はサイクロイドである。このとき、転がる円の直径がつくる直線群を描いてみると、包絡線にもサイクロイドが現れる。そして、そのサイクロイドは、元のサイクロイドの $\frac{1}{2}$ の大きさになっている。

類似の性質は、内サイクロイドや外サイクロイドでも確認することができる。

例えば、半径 1 の定円の内部を転がる半径 $\frac{1}{2}$ の円について、その直径が描く直線群の包絡線は、直径 $\frac{1}{4}$ の円が描く内サイクロイド（アステロイド）になる。

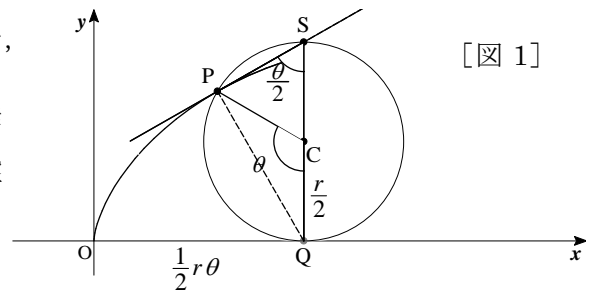
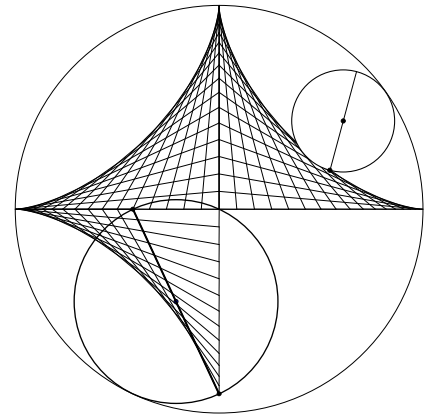
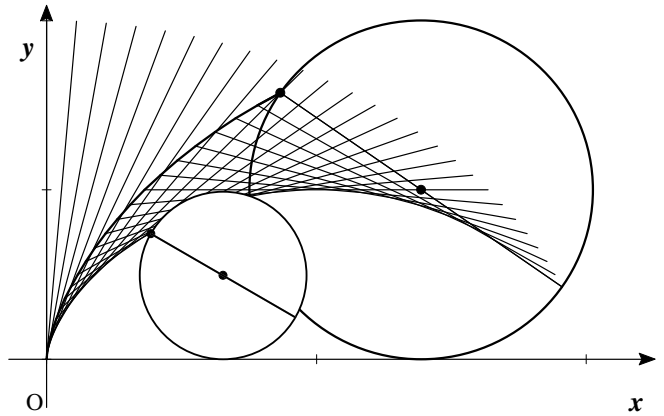
一般に、『曲線上を転がる半径 r の円において、その直径がつくる直線群の包絡線は、半径 $\frac{r}{2}$ の円によるサイクロイドである』が成り立つ。

これは以下のように、初等的に証明することができる。

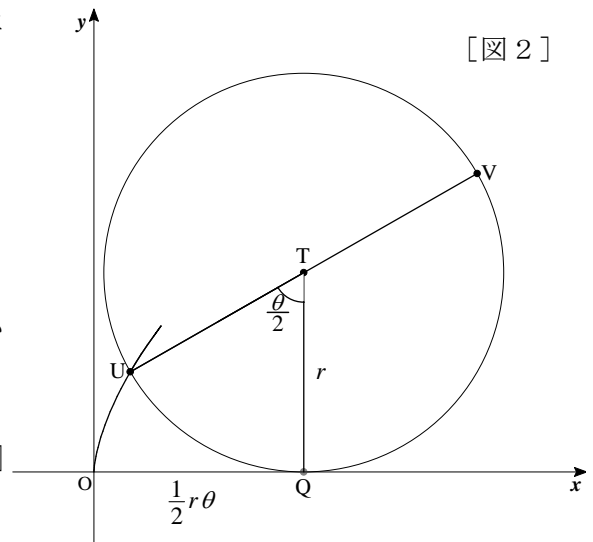
図 1 は、半径 $\frac{r}{2}$ の円が x 軸上を転がる様子であり、水平方向に $OQ = \frac{1}{2}r\theta$ 進んだところである。ここで、軌跡点 P と接地点 Q を結ぶ直線は点 P での接線に垂直である（接地点 Q は瞬間速度 0 であるから、円盤 C は点 Q を中心とする円運動をする）から、接線が円と交わる点 S は円の最上点である。したがって、 $\angle PSQ = \frac{\theta}{2}$ である。

図 2 は、半径 r の円が x 軸上を転がる様子で、水平方向に $OQ = \frac{1}{2}r\theta$ 進んだところである。このとき、円の回転角は $\frac{\theta}{2}$ であるから、この円の中心 T と図 1 の点 S は一致し、直径 UV は接線 PS と重なる。

以上から、『直線上を転がる半径 r の円の直径は、半径 $\frac{r}{2}$ の円によるサイクロイドに接する』ことがわかる。この証明において、円が転がるのは直線上であることは使っていない。したがって、『直線』を『曲線』と読み替えても差し支えない。（証明終）



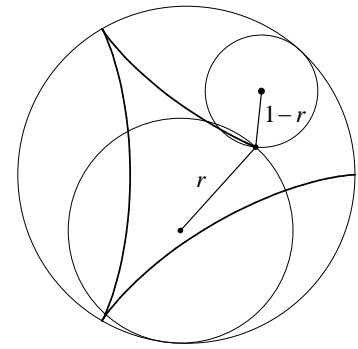
[図 1]



[図 2]

■ $\frac{r}{2} = 1 - r$

半径 1 の定円の内部を回転する半径 r の動円上の 1 点の軌跡と、半径 $(1-r)$ の動円上の 1 点の軌跡は、一致する。とくに、半径 1 の定円の内部を回転する半径 $\frac{2}{3}$ の動円上の 1 点の軌跡は、デルトイドであるが、半径 $\frac{1}{3}$ の動円上の 1 点の軌跡も、デルトイドである。



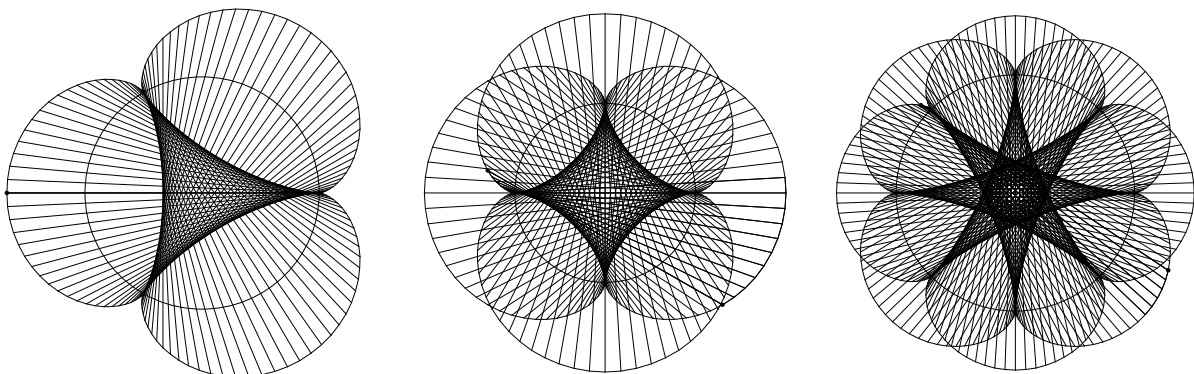
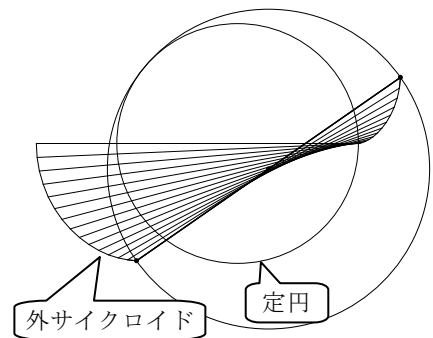
以上の事柄をまとめると、

1. 半径 1 の定円の内部を転がる半径 $\frac{2}{3}$ の円周上の 1 点の軌跡はデルトイドである。
2. 半径 1 の定円の内部を転がる半径 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ の円周上の 1 点の軌跡はデルトイドである。
3. 半径 1 の定円の内部を転がる半径 $\frac{2}{3}$ の円の直径がつくる直線群の包絡線は、半径 $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ の円が描く内サイクロイド、すなわちデルトイドである。

これは次のようにも表現できる。デルトイドにおいては $r = \frac{2}{3}$ であるから、『半径 1 の定円の内部を回転する半径 r の動円があるとき、動円上の 1 点による軌跡と動円の直径がつくる包絡線は一致する』。逆に、そのような条件を満たす内サイクロイドは、方程式 $\frac{r}{2} = 1 - r$ を満たさねばならず、その唯一の解が $r = \frac{2}{3}$ 、すなわちデルトイドである。

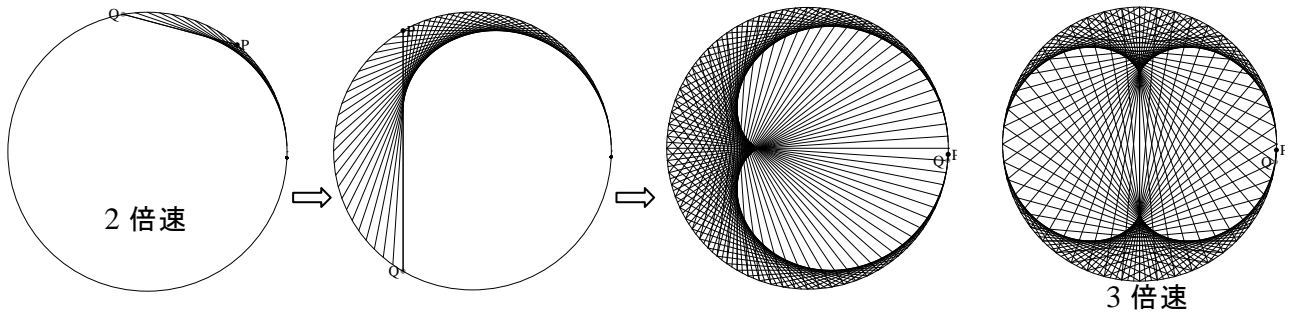
■ 内サイクロイドと外サイクロイドのコラボレーション

話題がデルトイドから離れるが、 $1 < r < 2$ とすると、 $r > 1$ であるから、半径 r の動円は半径 1 の定円を内部に含むように回転し、円周上の定点は外サイクロイドを描く。一方、 $0 < \frac{r}{2} < 1$ であるから、この円の直径がつくる直線群の包絡線は、内サイクロイドである。このようにして、外サイクロイドと内サイクロイドの興味深い関係を見ることができる。



■ 円周上を定速でまわる 2 点を結ぶ直線の包絡線

正多角形の頂点を同方向に一定速度で回る 2 点 P, Q があり, Q は P の 2 倍の速さで回っていると
する。このとき, 2 点を結ぶ直線 PQ による直線群を描くと, 包絡線としてカージオイドが現れる。



2 点 P, Q の速度比が 2 倍以外の整数倍でも, 包絡線として外サイクロイドが現れる。

この性質は次のように証明することができる。

原点を中心とする半径 1 の円周上を, 点 P を中心とする半径 a の円が転がっているとしよう。このとき, 前述のように, 円 P の直径がつくる直線群の包絡線は, 半径 $\frac{a}{2}$ の円による外サイクロイドである。

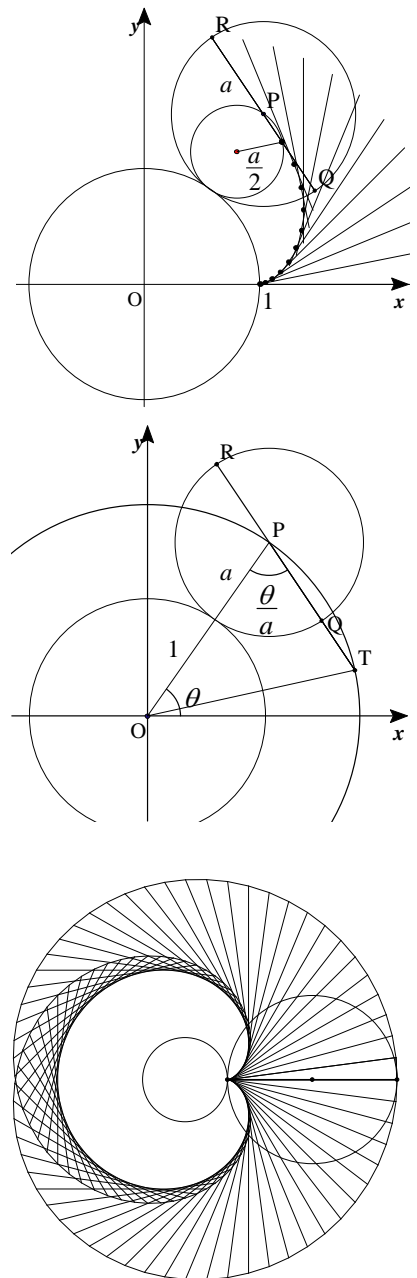
右上図において, 点 O を中心とする半径 OP の円を描き, 円 P の直径 RPQ もしくはその延長がこの新しい円と交わる点を T とする (右図)。

動径 OP の偏角を θ とすれば, $\angle OPT = \frac{\theta}{a}$ であるから, 動径 OT の偏角は, $\theta - (\pi - 2 \times \frac{\theta}{a}) = (1 + \frac{2}{a})\theta - \pi$ である。

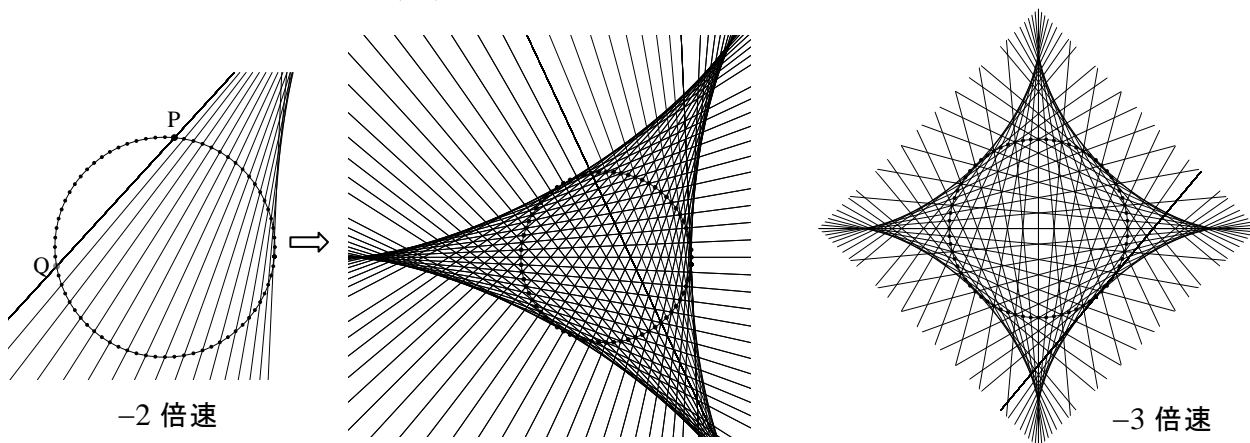
このことから, 点 T が円周上を回る速さは, 点 P の $(1 + \frac{2}{a})$ 倍であることがわかる。

すなわち, 2 点 P, T の速度比は $1 : (1 + \frac{2}{a})$ であり, 直線 PT がつくる直線群の包絡線は, 半径 $\frac{a}{2}$ の円が描く外サイクロイドである。(証明終)

このページ上部の例では, 速度比が $1 : (1 + \frac{2}{a}) = 1 : 2$ であるから $a = 2$ を得る。このとき, $\frac{a}{2} = 1$ であるから, 直径の包絡線はカージオイドである。



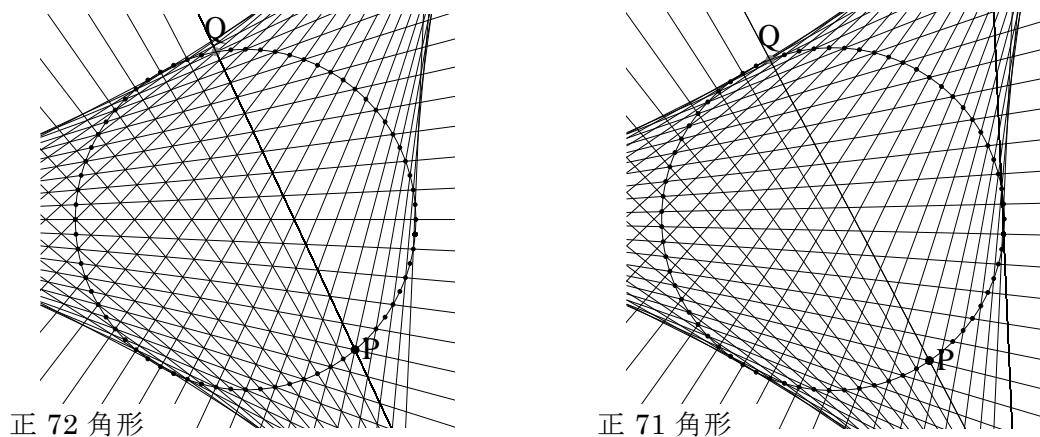
なお、P, Q が逆方向に動く場合には、内サイクロイドの包絡線が現れる。
とくに、2点の速度比が 1:(-2) のとき、包絡線としてデルトイドが現れる。



外（あるいは内）サイクロイドは、 $x = \cos kt + k \cos t$, $y = \sin kt + k \sin t$ で表されるから、円周上に2点 $P(\cos kt, \sin kt)$, $Q(\cos t, \sin t)$ をとれば、線分 PQ の $k:1$ の分点が外（あるいは内）サイクロイドになることは容易に気付くが、直線 PQ は接線にもなっているのである。

■ 円周上を定速でまわる2点を結ぶ直線の交点

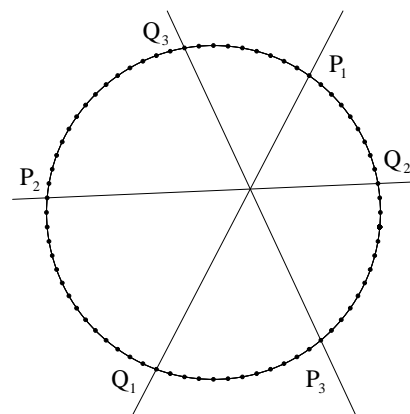
正72角形の頂点を1:(-2)の速度比で回る2点 P, Q を結ぶ直線による直線群を描くと、必ず3本ずつの直線が交わる。頂点の個数をさまざまに変えて調べてみると、頂点の個数が偶数の時には必ず3本ずつの直線が交わるが、奇数の時には3本の直線が1点で交わることはない。



そこで、3本の直線 P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 が1点で交わる場合を調べてみると、出発点（円の右端）から、 P_1, P_2, P_3 が進んだ角度（中心角）を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ($0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < 2\pi$) とする（次ページ図参照）とき、

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = (2k+1)\pi \quad (k \text{ は整数}) \cdots (*)$$

が成り立っていることがわかる。実は、これが3本の直線が1点で交わるための必要十分条件なのである。



実際、(*) 式から、

$$\alpha_1 = \frac{(-2\alpha_2) + (-2\alpha_3)}{2} + \pi + 2k\pi$$

を得るが、 $-2\alpha_2, -2\alpha_3$ は Q_2, Q_3 が進んだ角度であるから、この式は、点 P_1 が弧 Q_2Q_3 の中点であることを示している。同様に、 P_1, P_2, P_3 はそれぞれ (左回りの) 弧 Q_2Q_3, Q_3Q_1, Q_1Q_2 の中点になっていることがわかる。このとき、 $Q_2P_1 = P_1Q_3$, $Q_3P_2 = P_2Q_1$, $Q_1P_3 = P_3Q_2$ であるから、

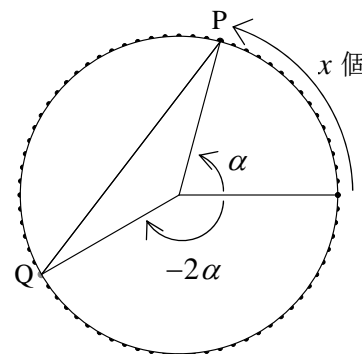
$$Q_2P_1 \cdot Q_3P_2 \cdot Q_1P_3 = P_1Q_3 \cdot P_2Q_1 \cdot P_3Q_2$$

が成り立ち、弦に関するチェバの定理^{※2}から 3 直線 P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 は 1 点で交わる。逆の証明は割愛する。^{※3}

ここで、正 n 角形において、中心角 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ に対応する頂点の個数を x_1, x_2, x_3 とすると、 $\alpha_i = \frac{2\pi x_i}{n}$ ($i = 1, 2, 3$) であるから、(*) 式より、

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{2k+1}{2}n$$

を得る。 x_1, x_2, x_3 は整数であるから、 n が偶数のときだけこの条件を満たすことができる。



■ おわりに

このレポートを最後まで目を通してくださったことに感謝します。

GRAPES は次の URL から Download することができます。

<http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/>

また、このレポートは、下記の 5 つのレポートをもとに作成しました。

「転がる円の直径の包絡線」

「異なる速さで円周上を回る 2 点を結ぶ弦が作る模様」

「円周上を 1 : 2 の速さで逆方向に回る 2 点を結ぶ直線の交点について」

「円周上を 1 : 2 の速さで逆方向に回る 2 点を結ぶ直線の諸性質に関する代数的考察」

「正 18 角形の対角線」(弦に関するチェバの定理の説明があります)

下記 URL から Download してください。

<http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/report/>

※2 円周上の 6 点 A, B, C, D, E, F について、3 直線 AD, BE, CF が 1 点で交わるための必要十分条件は、 $AB \cdot CD \cdot EF = FA \cdot BC \cdot DE$ が成り立つことである。

※3 逆の図形的な証明はかなり煩雑である。そこで、円周上を 1 : (-2) の速さで回る 2 点を結ぶ直線について、複素平面を用いて調べてみたが、これについては非常によい結果を得ている。