数　　学

第67巻　第3号　　2015年7月　夏季号

別刷

日本数学会編集　　岩波書店発売

新しいアルティン環の流れ

馬 場 良 始

中山環・準フロベニウス環で代表されるアルティン環は，原田学の論文 [44] に登場した新しいアルティン環 (これは後に大城紀代市により原田環とよばれることになる) の視点から再考察が行われた．ここでは，その再考察について論説する．以下，すべての環は単位元をもち，すべての加群は単位的であるとする．J または $J(R)$ を環 R の Jacobson 根基とし，R-加群 M に対し，M の移入包絡を $E(M)$，Jacobson 根基を $Rad(M)$，socle を $S(M)$，top $M/Rad(M)$ を $T(M)$ と表す．

1 原田環の定義

定義 R を環，M を R-加群とする．M はその移入包絡 $E(M)$ において small であるとき **small**，そうではないとき **non-small** とよぶ．そして，完全環 R は任意の non-small 左R-加群が零加群ではない移入的部分加群をもつとき**左原田環**とよぶ．

[44] では，原田環の双対概念であり，後に余原田環とよばれることになる環も定義されている．

定義 R-加群 M は，任意の全射 R-準同型 $\varphi : P \to M$ (ここで P は射影的加群) に対し $\mathrm{Ker}\,\varphi$ が P において essential ではないとき **non-cosmall** とよぶ．そして，右零化イデアルの集合に昇鎖条件が成り立つ環 R は，任意の non-cosmall 右R-加群が零加群ではない射影的直和因子をもつとき**右余原田環**とよぶ．

後年 [111] において，環が左原田環であることは右余原田環であることと必要十分であることが証明され，現在は‘余原田環’という用語は意味のないものになっていると言える．しかし，原田環の性質を整理して説明するのに有用であるので，この後もこの用語を使うことにする．そして，左原田環と右余原田環の同値性を念頭に，原田環は主に‘左’側で，余原田環は‘右’側で扱うことにする．

原田環 (余原田環) は両側アルティン環であり ([111])，中山環や準フロベニウス環の一般化である．ちなみに，中山環・準フロベニウス環の定義は次の通りである．

定義 **中山環**とは，任意の原始べき等元に対し，それから生成される右イデアルと左イデアルが両方とも単列的である (つまり，ただ 1 つの組成列をもつ) アルティン環であり，Köthe の uni-serial 環を中山正が 1940, 1941 年に一般化し研究したものである ([97], [96])．

また，**準フロベニウス環** (これ以降 **QF 環**と略称する) とは，その右レギュラー加群も左レギュラー加群も両方とも移入的であるようなアルティン環であり[1)]，Frobenius, Brauer, Nesbitt によって研究されていた Frobenius 多元環を，中山正が 1939, 1941 年にアルティン環に一般化し研究したものである ([96])．

左原田環は右原田環とは限らない．例えば，k を体とし，$Q := k[x,y]/(x^2,y^2)$ とおくと Q は局所 QF 環である．このとき，剰余行列環

$$\begin{pmatrix} Q & Q \\ J(Q) & Q \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 0 & S(Q_Q) \\ 0 & S(Q_Q) \end{pmatrix}$$

は左原田環ではあるが右原田環ではない．

原田環は様々な視点から研究が行われている．それらをまず§2〜§6で紹介しよう．§2ではlifting, extendingとそれに関連する特徴付けについて（原田環の一般化である準原田環についても述べる），§3では直既約射影的加群，直既約移入的加群による特徴付けについて，§4ではalmost projective, almost injectiveによる特徴付けについて，§5では極大商環による特徴付けについて，§6では行列による表現（ブロック拡大上階段型剰余環）について解説する．そして§7において新しい行列環であるskew行列環の定義を行い，§8でQF環とskew行列環の関係，§9でskew行列環を用いた中山環の構造を，そして§10で原田環の研究を契機として生まれたアルティン環に関する森田自己双対性の研究成果について述べる．

2 lifting, extendingとそれに関連する特徴付け

定義 左R-加群Mは，任意の部分加群Nに対して，Mの直和因子でNをessentialに含むものが取れるとき**extending**とよび，Mの直和因子Dで$N \supseteq D$かつN/DはM/Dにおいてsmallなるもの（このときDはMにおけるNの**co-essential部分加群**とよぶ）が取れるとき，言い換えると，直和分解$M = M_1 \oplus M_2$が$M_1 \subseteq N$かつ$N \cap M_2 \ll M_2$を満たすように取れるとき**lifting**とよぶ．

liftingは射影性の一般化として定義され（準射影性の一般化にもなっている），extendingは移入性の一般化として定義された（準移入性の一般化にもなっている）．元々はある特定の剰余加群においてliftしたり，もしくは部分加群をextendする性質の研究[2)]を一般化した概念であり，現在では非常に重要で一般的な概念とされている．

そして，中山環はこれらの概念を用いて次のように特徴付けられる．環Rが中山環であることは，すべてのextending左R-加群がliftingであることや，すべての準移入的左R-加群がliftingであることや，Rが右完全環かつすべてのlifting右R-加群がextendingであることや，すべての準射影的右R-加群がextendingであることや，これらの条件の左右を入れ換えたものと同値である（[109]）．

それに対して，環Rが左原田環であることは，すべての移入的左R-加群がliftingであることと必要十分であり，Rが右余原田環であることは，すべての射影的右R-加群がextendingであることと必要十分である．さらに，lifting, extendingの性質から，Rが左原田環であることは，任意の左R-加群が移入的加群の直和とsmall加群の直和として表されることや，Rが左完全環かつ移入的左R-加群の族はsmall coverを取ることに関して閉じていること（つまり，任意の移入的左R-加群Eと全射R-準同型$\varphi : M \to E$に対し，もし$\mathrm{Ker}\,\varphi$がMにおいてsmallであればMは移入的）と同値であり，Rが右余原田環であることは，任意の右R-加群が射影的加群とsingular加群の直和として表されること（singular加群とは，ある加群のあるそのessential部分加群による剰余加群として表される加群のことである）や，射影的右R-加群の族はessential extensionに関して閉じていることと同値となる（[108]）．

実は，今紹介した左原田環の同値条件の1つ‘すべての移入的左R-加群はlifting’が一般化され，左準原田環とよばれるものが定義された（[11]）．左準原田環の定義は，次の通りである．

定義　左アルティン環 R は，すべての直既約移入的左 R-加群が準射影的であるとき**左準原田環**とよばれる．左準原田環は両側アルティン環になる ([78])．そして，両側準原田環は**準原田環**とよばれる．

準原田環の典型例は，Q を局所 QF 環 (例えば前ページで例として与えたもの)，I をそのイデアルとするとき，

$$\begin{pmatrix} Q & Q \\ I & Q \end{pmatrix}$$

と表される行列環である．

QF 環を一般化した QF-2 環，QF-3 環という重要な環が 1948 年に Thrall によって定義されている ([125])．同時に定義された QF-1 環の定義と合わせて紹介しよう．

定義　環 R は，任意の忠実右 R-加群 M に対し自然な写像 : $R \to \mathrm{BiEnd}(M_R)$ が全射となるとき**右QF-1** 環とよばれる．また環 R は，任意の直既約射影的右 R-加群が essential 単純部分加群をもつとき**右QF-2** 環とよばれる．さらに環 R は，ある忠実右 R-加群 M が存在して任意の忠実右 R-加群 N は M と同型な直和因子をもつとき**右QF-3** 環とよばれる．(QF-3 環の詳細は [124], [123] 参照.)

また，局所分配的環は中山環の一般化として重要な意味をもっている．

定義　両側アルティン環 R は，R の任意のべき等元 e に対して eR_R と $_RRe$ が分配的 (つまり任意の部分加群 X_1, X_2, X_3 に対し，$X_1 \cap (X_2 + X_3) = (X_1 \cap X_2) + (X_1 \cap X_3)$ が成り立つ) であるとき**局所分配的環**とよぶ．

原田環，準原田環は，中山環，QF 環，QF-2 環，QF-3 環，局所分配的環と，次のような関係をもつ ([11], [44], [78])．

$$\begin{tikzcd}
 & \text{局所分配的右QF-2環} \arrow[dr] & & \\
\text{中山環} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \text{左原田環} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{左準原田環} \arrow[r] & \text{右QF-2環} \\
\text{QF環} \arrow[r] \arrow[ur] & \text{準原田環} \arrow[r] \arrow[ur] & \text{両側QF-3環} &
\end{tikzcd}$$

左準原田環は，左原田環と同様，右余準原田環と定義されるべき環 (そのような定義は行われないが) と同値になる．つまり，左アルティン環 R に対し，R が左準原田環であることは，すべての直既約射影的右 R-加群が準移入的であることと必要十分である[3)]．また，原田環・余原田環の定義に対応する準原田環の同値条件は次の通りである．左アルティン環 R に対し，R が左準原田環であることは，すべての non-small 余局所左 R-加群が移入的かつ準射影的である (essential 単純部分加群をもつ加群を余局所加群とよぶ) ことや，すべての non-cosmall 局所右 R-加群が射影的かつ準移入的であることと同値である ([11])．

3　直既約射影的加群，直既約移入的加群による特徴付け

環 R が左原田環であることは，R が左アルティン環かつその任意の直既約移入的左 R-加群が $_RRe/S_i(_RRe)$ (ここで e は原始べき等元で左 R-加群 $_RRe$ が移入的なもの，i は非負整数) の形で表されることや，R が完全環でその原始べき等元 e で $_RRe$ が non-small なものおのおのに対し $_RRe$, $_RRe/S_1(_RRe)$, ..., $_RRe/S_t(_RRe)$ が移入的で $_RRe/S_{t+1}(_RRe)$ が small となる非負整数 t が存在することと同値である ([11], [44]) (ここで $S_i(_RRe)$ は左イデアル $_RRe$ の i-th socle，つまり

$S_1({}_RRe)$ は ${}_RRe$ の socle, $S_2({}_RRe)$ は ${}_RRe$ の部分加群で $S_2({}_RRe)/S_1({}_RRe) = S({}_RRe/S_1({}_RRe))$ を満たすもの，$S_3({}_RRe)$ は ${}_RRe$ の部分加群で $S_3({}_RRe)/S_2({}_RRe) = S({}_RRe/S_2({}_RRe))$ を満たすもの，... と帰納的に定義されるもの)．そしてさらに考察を進めて，$\{e_i\}_{i=1}^n$ を R の原始べき等元で ${}_RRe_i$ が移入的であるようなものの基本集合とするとき，各 $i = 1, \ldots, n$ に対し $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ を $\{\,Re_i/S_j({}_RRe_i)\,\}_{i=1,\,j=0}^{n\quad k_i}$ が直既約移入的左R-加群の基本集合となるように取れることが分かる．

一方，環 R が右余原田環であることは，R が左アルティン環でその任意の直既約射影的右R-加群は fJ^i (ここで f は原始べき等元で fR_R が移入的なもの，i は非負整数) の形で表されることや，R が半完全環でその直交原始べき等元の完全集合 $\{e_{ij}\}_{i=1,\,j=1}^{m\quad n(i)}$ が，任意の $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 2, 3, \ldots, n(i)$ に対して $e_{i1}R_R$ は移入的かつ $e_{ij}R_R$ は $e_{i,j-1}R$ または $e_{i,j-1}J_R$ と R-同型となるように取れることと同値である ([11], [44])．

定義　左原田環と右余原田環は同じ概念であったので，最後に述べた右余原田環の同値条件の直交原始べき等元の完全集合 $\{e_{ij}\}_{i=1,\,j=1}^{m\quad n(i)}$ を，左原田環の**左 well-indexed 集合**とよぶ．

4　almost projective, almost injective による特徴付け

定義　M, N を R-加群とする．N の任意の部分加群 K と任意の R-準同型 $\varphi : M \to N/K$ に対し，次の (AP1) か (AP2) のいずれかが成り立つとき，M は **almost N-projective** とよぶ ([48])．ただし，$\nu : N \to N/K$ は自然な全射 R-準同型とする．

(AP1) $\nu\tilde{\varphi} = \varphi$ を満たす R-準同型 $\tilde{\varphi} : M \to N$ が存在する．

(AP2) N の零加群ではない直和因子 N' と R-準同型 $\tilde{\psi} : N' \to M$ で $\varphi\tilde{\psi} = \nu|_{N'}$ を満たすものが存在する．

そして，almost N-projective の双対概念として **almost N-injective** が定義される[4) ([7])．また R-加群 M は，すべての組成列の長さが有限な R-加群 N に対して almost N-projective となるとき **almost projective 加群**とよばれ，almost N-injective となるとき **almost injective 加群**とよばれる[5) ([123])．そして，その右レギュラー加群が almost injective 加群となる両側アルティン環を**右 almost QF 環**とよび，その任意の直既約移入的右R-加群が almost projective 加群となる両側アルティン環を**右 almost QF$^\#$ 環**とよぶ ([58])．

almost N-projective, almost N-injective はそれぞれ N-projective, N-injective の一般化として定義された．そして，これらの概念を用いて右 almost QF 環と左 almost QF$^\#$ 環が定義されたが，これらはまさにそれぞれ右余原田環，左原田環と同じ概念の環である ([58])．

また，この結果を準原田環に一般化すると，左アルティン環 R に対し，R が左準原田環であることは，すべての直既約移入的左R-加群 E が有限生成 almost E-projective であることや，すべての直既約射影的右R-加群 P が almost P-injective であることと同値となる ([11])．

5　極大商環による特徴付け

環を，その拡大環の視点から研究しようとするとき，極大商環は効果的である．極大商環の定義は次の通りである．

定義　環 R に対し，$H := \mathrm{End}_R(E(R_R))$ とおくとき，$\mathrm{End}_H(E(R_R))$ を R の**極大右商環**とよび，左右対称に**極大左商環**も定義する．R が QF-3 環のとき，極大右商環と極大左商環は一致する．よっ

てこのとき単に R の**極大商環**とよび $Q(R)$ で表す.

極大商環を用いた環の構造定理は，まず QF-3 環に対して行われた ([124]). 左原田環に関する同様の構造定理は次の (I), (II), そしてそれに付随する大域次元がたかだか 3 (QF-3 環に関するものは 2) の原田環についての定理は次の (III) のようなものである ([12], [13], [76]). ただし，左 A-加群 M が**原田ブロック分解をもつ**とは，M は直既約加群への直和分解 $M = \bigoplus_{i=1}^m M_i$ で，M_1 は射影的，各 $i = 1, 2, \ldots, m-1$ に対し M_{i+1} は M_i または $M_i/S(M_i)$ に A-同型，任意の $j = 1, 2, \ldots, m-1$ に対し $M_j \not\cong M_m$ なる M_j は移入的，を満たすものが存在するときとし，右 A-加群 N が**余原田ブロック分解をもつ**とは，N は直既約加群への直和分解 $N = \bigoplus_{i=1}^n N_i$ で，N_1 は移入的，各 $i = 1, 2, \ldots, n-1$ に対し N_{i+1} は N_i または $Rad(N_i)$ に A-同型，任意の $j = 1, 2, \ldots, n-1$ に対し $N_j \not\cong N_n$ なる N_j は射影的，を満たすものが存在するときとする.

(I) 環 R が左原田極大商環であることは，環 A が存在し R は原田ブロック分解をもつ部分加群の直和で表される生成かつ余生成で組成列の長さが有限な左 A-加群の自己準同型環で表現されることや，環 A が存在し R は余原田ブロック分解をもつ部分加群の直和で表される生成かつ余生成で組成列の長さが有限な右 A-加群の自己準同型環で表現されることと同値である.

(II) R を左原田環とし $\{e_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m\ n(i)}$ をその左 well-indexed 集合とするとき，$e_{ij}Re_{ij'}$ $(i = 1, 2, \ldots, m,\ 1 \leq j \leq j' \leq n(i))$ すべてと $J(R)$ の両方を含む $Q(R)$ の部分環はすべて左原田環 (よってもちろん $Q(R)$ も左原田環). 逆に，$Q(R)$ が左原田環であるとき，R が左原田環であることは，$Q(R)$ の左 well-indexed 集合 $\{e_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m\ n(i)}$ で R が $e_{ij}Q(R)e_{ij'}$ $(i = 1, 2, \ldots, m,\ 1 \leq j \leq j' \leq n(i))$ すべてと $J(Q(R))$ の両方を含むものが存在することと必要十分である.

(III) 左大域次元もしくは右大域次元がたかだか 3 である左原田環は中山環になる.

左原田環に関する上記の (I), (II), (III) は元々 QF-3 環に対して与えられた定理であったことは既に述べた通りである. この元の定理について復習しておく.

(I) 環 R が QF-3 極大商環であることは，両側加群 ${}_AU_B$ とそれに関して森田双対的な環 A, B が存在し，R は U-反射的な生成かつ余生成な左 A-加群 K の自己準同型環で表現されることと必要十分である. (R が QF-3 環であるとき，Re, fR をそれぞれ極小忠実左イデアル，極小忠実右イデアル (e, f は R のべき等元) とするとき，環 fRf と eRe は ${}_{fRf}fRe_{eRe}$ に関して森田双対的となる. そして，この定理において $A \cong fRf$, ${}_AK \cong {}_{fRf}fR$ となる.)

(II) R を QF-3 環とし Re, fR をそれぞれその極小忠実左イデアル，極小忠実右イデアルとするとき，1, Re, fR を含む $Q(R)$ の部分環 R' はすべて QF-3 であり，その極小忠実左イデアル，極小忠実右イデアルは $R'e = Re$, $fR' = fR$ となる (よってもちろん $Q(R)$ も QF-3). 逆に，$Q(R)$ が QF-3 環であるとき，R が QF-3 環であることは，$Q(R)$ の極小忠実左イデアル，極小忠実右イデアル $Q(R)e$, $fQ(R)$ で R が $Q(R)e$, $fQ(R)$ で生成された $Q(R)$ の部分環を含むものが取れることと必要十分である.

(III) 左大域次元がたかだか 2 である半準素 QF-3 極大商環の森田同値類と有限表現型の環の森田同値類は (左アルティン環 A は，非同型な有限生成直既約左 A-加群を有限個しかもたないとき**有限表現型**とよぶ)，次の対応 (i), (ii) により 1 対 1 対応する.

(i) R をその左大域次元がたかだか 2 である半準素 QF-3 極大商環とし，fR をその極小忠実右イデアル (f は R のべき等元) とするとき，これに対し環 fRf を対応させる.

(ii) A を有限表現型の環とし，有限個しか存在しない互いに非同型な有限生成直既約左 A-加群すべての直和を M とするとき，A に対し M の自己同型環を対応させる．

そして，以上の (I), (II), (III) は準原田環に対する形にも書き直すことができる ([12])．まず準原田環にとって非常に重要な役割を果たし，後のセクションにも登場する diagonally complete 部分環を定義し，その後でそれらを紹介しよう．

定義 S を環 R の部分環とする．R の直交べき等元の完全集合 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ で $\bigoplus_{i=1}^{n} e_iRe_i \subseteq S$ を満たすものが存在するとき，S は R の **diagonally complete 部分環**であるとよぶ．

(I) 環 R が準原田極大商環であることは，環 A が存在し R は準射影的かつ準移入的な部分加群の直和で表される生成かつ余生成で組成列の長さが有限な左 A-加群の自己準同型環で表現されることと必要十分である．

(II) R を準原田環とし Re, fR をそれぞれその極小忠実左イデアル，極小忠実右イデアルとするとき，Re, fR を含む $Q(R)$ の diagonally complete 部分環はすべて準原田環である．逆に，$Q(R)$ が準原田環であるとき，R が準原田環であることは，R は $Q(R)$ の diagonally complete 部分環かつ $Q(R)$ のある極小忠実左イデアル，極小忠実右イデアル $Q(R)e, fQ(R)$ を含むことと必要十分である．

(III) 左大域次元がたかだか 2 である準原田極大商環の森田同値類と中山環の森田同値類は，QF-3 環に関する (III) と同じ対応により 1 対 1 対応する．

そして，片側準原田環に関しては，R が左準原田環であるとき，その極大右商環もまた左準原田環であることが知られている ([78])．

この定理の拡張は，さらに中山環に対しても行われた．結果は次の通りである．

(I) 環 R が中山極大商環であることは，中山環 A が存在し R は原田ブロック分解をもつ部分加群の直和で表される生成かつ余生成で組成列の長さが有限な左 A-加群の自己準同型環で表現されることや，中山環 A が存在し R は余原田ブロック分解をもつ部分加群の直和で表される生成かつ余生成で組成列の長さが有限な右 A-加群の自己準同型環で表現されることと同値である．

(II) R を中山環とし $\{e_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m\ n(i)}$ をその左 well-indexed 集合とするとき，$e_{ij}Re_{ij'}$ $(i = 1, 2, \ldots, m,$ $1 \leq j \leq j' \leq n(i))$ すべてと $J(R)$ の両方を含む $Q(R)$ の部分環はすべて中山環．逆に，$Q(R)$ が中山環であるとき，R が中山環であることは，$Q(R)$ の左 well-indexed 集合 $\{e_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m\ n(i)}$ で R が $e_{ij}Q(R)e_{ij'}$ $(i = 1, 2, \ldots, m,\ 1 \leq j \leq j' \leq n(i))$ すべてと $J(Q(R))$ の両方を含むものが存在することと必要十分である．

(III) 左大域次元がたかだか 2 である中山極大商環の森田同値類と $J(A)^2 = 0$ なる中山環 A の森田同値類は，QF-3 環に関する (III) と同じ対応により 1 対 1 対応する．

6 行列による表現 (ブロック拡大上階段型剰余環)

すべての左原田環 R は，ある QF 環 (R の frame QF 部分環とよばれる) から構成される剰余行列環 (ブロック拡大上階段型剰余環とよばれる) の形で表される ([111], [17, Chapter 4])．ここでは，その表し方について述べる．

そのために，射影的かつ移入的な直既約 R-加群を特徴付ける i-pair という用語をまず紹介しよう．

定義 R を片側アルティン環，e を R の原始べき等元とする．このとき，右 R-加群 eR が移入的であることと，R の原始べき等元 f で $S(eR_R) \cong T(fR_R)$ かつ $S({}_RRf) \cong T({}_RRe)$ を満たすものが

存在することは同値である([38])[6]. そしてこの同値条件が成り立つことを, (eR, Rf) は **i-pair** であると表すことにする. (i-pair の左右対称性より, もちろんこのとき左 R-加群 Rf も移入的である.)

次に, QF 環が常にもつ中山置換とよばれる置換を定義しよう.

定義 R を QF 環とし $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を R の直交原始べき等元の基本集合とするとき, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ の置換 τ を各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し $(e_iR, R\tau(e_i))$ が i-pair となるように取ることができる. この置換を**中山置換**とよぶ.

以後, このセクションを通して, R を左原田環とし, 議論を単純化するために **R は直既約基本的環**とする. さらに, $\{e_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m\ n(i)}$ を R の左 well-indexed 集合とし, m 個存在する i-pair を写像 σ, ρ : $\{1, 2, \ldots, m\} \to \mathbb{N}$ を用いて $(e_{i1}R, Re_{\sigma(i),\rho(i)})$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ と表そう.

定義 σ が $\{1, \ldots, m\}$ の置換となるとき, R を **$(\sharp)$-型の左原田環**とよぶ.

任意の $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ に対し, $A_{ij} := e_{i1}Re_{j1}$, 特に $Q_i := A_{ii}$, さらに

$$R_1 := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & Q_2 & \ddots & A_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & Q_m \end{pmatrix}$$

とおく. このとき, R_1 もまた直既約基本的左原田環になる.

もし R が $(\sharp)$-型の左原田環であれば, R_1 は QF 環となり, 各 $i = 1, \ldots, m$ に対し $(e_{i1}R_1, R_1e_{\sigma(i)1})$ が i-pair, つまり QF 環 R_1 の中山置換 τ は $e_{i1} \mapsto e_{\sigma(i)1}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ と定義されるものになる. このとき, この R_1 を R の **frame QF 部分環**とよび $F(R)$ で表す. そして, 元の R はこの frame QF 部分環 $F(R)$ から構成される剰余環で表現される. 具体的には, 各 $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対し $n(i)$ 次正方行列 $P(i,i)$ と $i \neq j$ のとき $(n(i), n(j))$-行列 $P(i,j)$ を (これらをブロックとよぶ)

$$P(i,i) := \begin{pmatrix} Q_i & Q_i & \cdots & Q_i \\ J(Q_i) & Q_i & & Q_i \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ J(Q_i) & \cdots & J(Q_i) & Q_i \end{pmatrix}, \qquad P(i,j) := \begin{pmatrix} A_{ij} & \cdots & A_{ij} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{ij} & \cdots & A_{ij} \end{pmatrix}$$

と定義し, 今定義したブロック $P(i,j)$ を並べた $\sum_{l=1}^{m} n(l)$-次正方行列

$$P := \begin{pmatrix} P(1,1) & P(1,2) & \cdots & P(1,m) \\ P(2,1) & P(2,2) & \cdots & P(2,m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(m,1) & P(m,2) & \cdots & P(m,m) \end{pmatrix}$$

を考える. さらに任意の $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ に対し, $P(i,j)$ の部分集合 $I(i,j)$ を, $\sigma(i) \neq j$ のときは零行列, $\sigma(i) = j$ のときは $S({}_{Q_i}A_{ij}) = S(A_{ij\,Q_j})$ となるのでこれを $S(A_{ij})$ とおくとき,

$$I(i,j) = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \ \cdots \ 0}^{\rho(i)} & \overbrace{S(A_{ij}) \ \cdots \ S(A_{ij})}^{n(j)-\rho(i)} \\ \vdots \quad\ \ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 0 \ \cdots \ 0 & S(A_{ij}) \ \cdots \ S(A_{ij}) \end{pmatrix}$$

とおき，さらに

$$I := \begin{pmatrix} I(1,1) & I(1,2) & \cdots & I(1,m) \\ I(2,1) & I(2,2) & \cdots & I(2,m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I(m,1) & I(m,2) & \cdots & I(m,m) \end{pmatrix}$$

とおくとき，R は剰余環 P/I で表現される．この表現方法を**ブロック拡大上階段型剰余環**とよぶ．

次に R が $(\sharp)$-型の左原田環ではない場合を考えてみよう．このとき，異なる i, j で $\sigma(i) = \sigma(j)$ となるものが存在する．今，議論を簡単にするために m より小さい自然数 k が，$1 \leq i < k$ なる任意の i に対して $\sigma(i) \neq \sigma(k)$, $\sigma(k) = \sigma(k+1) = \cdots = \sigma(m)$, $\rho(k) < \rho(k+1) < \cdots < \rho(m)$ を満たすように取れると仮定してよい．このとき，$n'(k) := n(k) + n(k+1) + \cdots + n(m)$，さらに $e_{k1}, e_{k2}, \ldots, e_{k\,n(k)}$, $e_{k+1\,1}, \ldots, e_{k+1\,n(k+1)}, e_{k+2\,1}, \ldots, e_{m\,n(m)}$ をこの順に $e'_{k1}, e'_{k2}, \ldots, e'_{k\,n'(k)}$ とおき，環

$$R_2 := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & Q_2 & \ddots & A_{2k} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & Q_k \end{pmatrix}$$

を考えて，R_2 の要素を使って，各 $l = 1, 2, \ldots, k-1$ に対し $(n(l), n'(k))$-行列 $P'(l,k)$, $(n'(k), n(l))$-行列 $P'(k,l)$, $n'(k)$ 次正方行列 $P'(k,k)$ を

$$P'(l,k) := \begin{pmatrix} A_{lk} & \cdots & A_{lk} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{lk} & \cdots & A_{lk} \end{pmatrix}, P'(k,l) := \begin{pmatrix} A_{kl} & \cdots & A_{kl} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{kl} & \cdots & A_{kl} \end{pmatrix}, P'(k,k) := \begin{pmatrix} Q_k & Q_k & \cdots & Q_k \\ J(Q_k) & Q_k & & Q_k \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ J(Q_k) & \cdots & J(Q_k) & Q_k \end{pmatrix}$$

と定義し，ブロック $P(i,j)$ と $P'(i,j)$ を並べた $\sum_{i=1}^{k-1} n(i) + n'(k)$ 次正方行列

$$P' := \begin{pmatrix} P(1,1) & \cdots & P(1,k-1) & P'(1,k) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ P(k-1,1) & \cdots & P(k-1,k-1) & P'(k-1,k) \\ P'(k,1) & \cdots & P'(k,k-1) & P'(k,k) \end{pmatrix}$$

を考える．さらに，$P'(l,k)$, $P'(k,l)$, $P'(k,k)$ の部分集合 $I'(l,k)$, $I'(k,l)$, $I'(k,k)$ を，$\sigma(l) < k$ のとき，$I'(l,k)$ を零行列，$\sigma(l) \geq k$ のとき

$$I'(l,k) = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \ \cdots \ 0}^{\sum_{i=k}^{\sigma(l)-1} n(i) + \rho(l)} & \overbrace{S(A_{lk}) \ \cdots \ S(A_{lk})}^{\sum_{i=\sigma(l)}^{m} n(i) - \rho(l)} \\ \vdots \quad\ \ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 0 \ \cdots \ 0 & S(A_{lk}) \ \cdots \ S(A_{lk}) \end{pmatrix}$$

また，$\sigma(k) < k$ のとき，$I'(k,l)$ ($l \neq \sigma(k)$ のとき) と $I'(k,k)$ を零行列，そして

$$
I'(k,\sigma(k)) :=
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\vdots \\
\overbrace{\hphantom{0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0\ S(A_{k\sigma(k)})}}^{\rho(k+2)} \\
\overbrace{\hphantom{0\cdots\cdots\cdots\cdots 0\ S(A)}}^{\rho(k+1)} \\
\overbrace{\hphantom{0\cdots 0}}^{\rho(k)} \\
\left(\begin{array}{l}
0\cdots 0\ S(A_{k\sigma(k)})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots S(A_{k\sigma(k)}) \\
\vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
0\cdots 0\ S(A_{k\sigma(k)})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots S(A_{k\sigma(k)}) \\
0\cdots\cdots\cdots 0\ S(A_{k\sigma(k)})\cdots\cdots\cdots\cdots S(A_{k\sigma(k)}) \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
0\cdots\cdots\cdots 0\ S(A_{k\sigma(k)})\cdots\cdots\cdots\cdots S(A_{k\sigma(k)}) \\
0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0\ S(A_{k\sigma(k)})\cdots\cdots S(A_{k\sigma(k)}) \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0\ S(A_{k\sigma(k)})\cdots\cdots S(A_{k\sigma(k)}) \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \quad \ddots \qquad \vdots \\
0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0\ S(A_{k\sigma(k)})\cdots S(A_{k\sigma(k)}) \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\
0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0\ S(A_{k\sigma(k)})\cdots S(A_{k\sigma(k)})
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n(k) \\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n(k+1) \\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n(k+2) \\
\\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n(m)
\end{array} \\
\underbrace{\hphantom{0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0}}_{\rho(m)}
\end{array}
$$

$\sigma(k) \geq k$ のとき，$I'(k,l)$ を零行列，そして

$$
I'(k,k) :=
\begin{array}{l}
\qquad\qquad\vdots \\
\overbrace{\hphantom{0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0\ S(Q_k)}}^{\sum_{i=k}^{\sigma(k)-1} n(i)+\rho(k+2)} \\
\overbrace{\hphantom{0\cdots\cdots\cdots\cdots 0\ S(Q)}}^{\sum_{i=k}^{\sigma(k)-1} n(i)+\rho(k+1)} \\
\overbrace{\hphantom{0\cdots 0}}^{\sum_{i=k}^{\sigma(k)-1} n(i)+\rho(k)} \\
\left(\begin{array}{l}
0\cdots 0\ S(Q_k)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots S(Q_k) \\
\vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
0\cdots 0\ S(Q_k)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots S(Q_k) \\
0\cdots\cdots\cdots 0\ S(Q_k)\cdots\cdots\cdots\cdots S(Q_k) \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
0\cdots\cdots\cdots 0\ S(Q_k)\cdots\cdots\cdots\cdots S(Q_k) \\
0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0\ S(Q_k)\cdots\cdots S(Q_k) \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0\ S(Q_k)\cdots\cdots S(Q_k) \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \quad \ddots \qquad \vdots \\
0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0\ S(Q_k)\cdots S(Q_k) \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\
0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0\ S(Q_k)\cdots S(Q_k)
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n(k) \\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n(k+1) \\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n(k+2) \\
\\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n(m)
\end{array} \\
\underbrace{\hphantom{0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0}}_{\sum_{i=k}^{\sigma(k)-1} n(i)+\rho(m)}
\end{array}
$$

とおき，さらに

$$I' := \begin{pmatrix} I(1,1) & \cdots & I(1,k-1) & I'(1,k) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ I(k-1,1) & \cdots & I(k-1,k-1) & I'(k-1,k) \\ I'(k,1) & \cdots & I'(k,k-1) & I'(k,k) \end{pmatrix}$$

とおくとき，$R \cong P'/I'$ と表される．もし R_2 が QF 環であれば，R_2 を R の **frame QF 部分環**とよび $F(R)$ で表し，この表現を**ブロック拡大上階段型剰余環**とよぶ．R_2 が QF 環ではないとき，異なる i, j で $\sigma(i) = \sigma(j)$ となるものが存在するので，R_1 から R_2 を導き出したのと同じ議論により R_3 が得られる．そして，この操作をたかだか有限回繰り返して QF 環 R_n が得られる．このとき，この R_n を R の **frame QF 部分環**とよび $F(R)$ で表す．そして，R は $F(R)$ から構成される剰余行列環で表現される．この表現を**ブロック拡大上階段型剰余環**とよぶ ([111], [17])．(具体例は [17, Chapter 4] 参照.)

ここまでの部分で，任意の左原田環 R からその frame QF 部分環 $F(R)$ を求め，それを用いて R をブロック拡大上階段型剰余環で表現する方法を述べた．しかし，ただ単に R から $F(R)$ を求めるだけであれば，R の極小忠実右イデアルを用いることにより，次のように簡単に求めることができる．R を左原田環とし，fR を R の極小忠実右イデアル (f は R のべき等元) とする．このとき fRf も左原田環である．もし fRf が QF 環でないとき，さらに左原田環 fRf の極小忠実右イデアルを考えて $\cdots$ という作業を繰り返して，最終的に R のべき等元 f' で $f'Rf'$ が QF 環になるものが得られる．この $f'Rf'$ が frame QF 部分環 $F(R)$ である ([17])．

実はこれと同様のことは，両側準原田環でも成り立つことが知られている ([11])．つまり，両側準原田環もまた，極小忠実右イデアルを考えて得られるある QF 環から構成される ([11]) (与えられた両側準原田環から QF 環をみつけるところまではまったく同じ操作であるが，その QF 環から元の両側準原田環を構成する方法はもちろん異なる)．

さらに，片側準原田環でも同様のことが成り立つ ([78])．R を左準原田環とし，E を R の直交原始べき等元の基本集合，$\Lambda(R) := \mathrm{End}_R(E(R_R))$, $f := \sum\{e \in E \mid S(R_R)e \neq 0\}$, $\Gamma(R) := fRf$ とおき，さらに $\Lambda^0(R), \Lambda^1(R), \ldots$ と $\Gamma^0(R), \Gamma^1(R), \ldots$ を $\Lambda^0(R) = \Gamma^0(R) = R$，そして自然数 i に対し $\Lambda^i(R) = \Lambda(\Lambda^{i-1}(R))$, $\Gamma^i(R) = \Gamma(\Gamma^{i-1}(R))$ と帰納的に定義する．このとき，すべての自然数 i に対し，$\Lambda(R)$ と $\Gamma(R)$ も左準原田環であり ($\Lambda^i(R) \overset{\mathrm{M.d}}{\approx} \Lambda\Gamma^{i-1}(R) \overset{\mathrm{M.d}}{\approx} \cdots \overset{\mathrm{M.d}}{\approx} \Gamma^{i-1}\Lambda(R) \overset{\mathrm{M.d}}{\approx} \Gamma^i(R)$ なる関係も成り立つ．ただし $\overset{\mathrm{M.d}}{\approx}$ の意味は §10 を参照)，$\Lambda^i(R)$ の diagonally complete 部分環 S_i と S_i のイデアル I_i が $\Lambda^{i-1}(R) \cong S_i/I_i$ を満たすように取れ，しかもある自然数 m で $\Lambda^m(R)$ と $\Gamma^m(R)$ が森田同値な QF 環になる．

7 skew 行列環

中山環，QF 環，原田環はいずれも，skew 行列環 [110][7] とよばれる通常の行列環のとは異なった新たな積を導入した行列環で特徴付けられる．

定義 Q を環とし，$c \in Q$, $\sigma \in \mathrm{End}(Q)$ とする．もし，$\sigma(c) = c$ が成り立ち，かつ任意の $q \in Q$ に対し $cq = \sigma(q)c$ が満たされるとき，Q 上の n 次全行列環 $M_n(Q)$ に対し，新たな乗法を $(x_{ij}), (y_{ij}) \in M_n(Q)$ に対し $(x_{ij})(y_{ij}) = (z_{ij})$ と表すとき

$$z_{ij} = \begin{cases} \sum_{k<i} x_{ik}\sigma(y_{kj})c + \sum_{i\le k\le j} x_{ik}y_{kj} + \sum_{j<k} x_{ik}y_{kj}c & (i \le j \text{ のとき}), \\ \sum_{k\le j} x_{ik}\sigma(y_{kj}) + \sum_{j<k<i} x_{ik}\sigma(y_{kj})c + \sum_{i\le k} x_{ik}y_{kj} & (i > j \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義でき，さらに全行列環の乗法だけをこの新しいものに変更するとこれも環になる．この環を (σ, c, n) に関する Q 上の **skew 行列環**とよび,

$$(\,Q\,)_{\sigma,c,n} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} Q & \cdots & Q \\ \vdots & & \vdots \\ Q & \cdots & Q \end{pmatrix}_{\sigma,c,n}$$

と表す．$c=1$ で σ が恒等写像 1_Q のとき，$(\,Q\,)_{1_Q,1,n}$ は通常の行列環である．

$n=2,3$ のときの skew 行列環の積は次の通りである．(通常の行列の積と異なる部分に下線等を引いておく.)

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}y_{11} + \underline{x_{12}y_{21}c} & x_{11}y_{12} + x_{12}y_{22} \\ \underline{\underline{x_{21}\sigma(y_{11})}} + x_{22}y_{21} & \underline{x_{21}\sigma(y_{12})c} + x_{22}y_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11}y_{11} + \underline{x_{12}y_{21}c} + \underline{x_{13}y_{31}c} & x_{11}y_{12} + x_{12}y_{22} + \underline{x_{13}y_{32}c} & x_{11}y_{13} + x_{12}y_{23} + x_{13}y_{33} \\ \underline{\underline{x_{21}\sigma(y_{11})}} + x_{22}y_{21} + x_{23}y_{31} & \underline{x_{21}\sigma(y_{12})c} + x_{22}y_{22} + \underline{x_{23}y_{32}c} & \underline{x_{21}\sigma(y_{13})c} + x_{22}y_{23} + x_{23}y_{33} \\ \underline{\underline{x_{31}\sigma(y_{11})}} + \underline{x_{32}\sigma(y_{21})c} + x_{33}y_{31} & \underline{\underline{x_{31}\sigma(y_{12})}} + \underline{\underline{x_{32}\sigma(y_{22})}} + x_{33}y_{32} & \underline{x_{31}\sigma(y_{13})c} + \underline{x_{32}\sigma(y_{23})c} + x_{33}y_{33} \end{pmatrix}.$$

Q が局所環であれば，Q 上の skew 行列環は直既約半完全環になる．また，R が左 (右) アルティン環 (ネーター環) であれば，Q 上の skew 行列環もまたそうである．

8　QF 環と skew 行列環

定義　R を基本的 QF 環，$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を R の直交原始べき等元の完全集合，τ を R の中山置換とするとき，もし R の環自己同型 φ で任意の $i=1,2,\ldots,n$ に対して $\varphi(e_i) = \tau(e_i)$ を満たすものが存在するとき，この環自己同型を**中山自己同型**とよぶ．

Q を局所 QF 環とする．もし Q 上の skew 行列環を定義するために必要な $\sigma \in \mathrm{End}(Q)$ と $c \in Q$ が存在し，特に $\sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$ かつ $c \in J(Q)$ であるとき，skew 行列環 $(Q)_{\sigma,c,n}$ は基本的直既約 QF 環になる．さらにこのとき，各 $i=1,2,\ldots,n$ に対し e_i を (i,i)-行列単位とするとき，skew 行列環 $(Q)_{\sigma,c,n}$ の中山置換は $e_1 \mapsto e_n$，$e_j \mapsto e_{j-1}$ $(j=2,3,\ldots,n)$ なる巡回置換であり，かつ $(Q)_{\sigma,c,n}$ は中山自己同型をもつ．

このような skew 行列環は，実は次に定義する strongly QF 環と強い繋がりをもっている．

定義　環 R は，R の任意のべき等元 e に対し eRe が常に QF 環となるとき **strongly QF 環**とよぶ．また，中山置換が恒等置換であるような QF 環を **weakly symmetric QF 環**とよぶ．(Frobenius 多元環より強い条件をもつ symmetric 多元環，weakly symmetric 多元環がまず研究され，weakly symmetric は環に一般化された [100].)

Q が局所 QF 環で $\sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$ かつ $c \in J(Q)$ のとき，$(Q)_{\sigma,c,n}$ の任意のべき等元 e に対し環

$e(Q)_{\sigma,c,n}e$ もまた $(Q)_{\sigma,c,k}$ $(k \leq n)$ の形で表現される．したがって，skew 行列環 $(Q)_{\sigma,c,n}$ は strongly QF 環である．逆に，基本的直既約 QF 環 R は，もしその任意のべき等元 e に対し eRe が巡回中山置換をもつ QF 環であれば，ある局所 QF 環 Q, $\sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$, $c \in J(Q)$ による skew 行列環 $(Q)_{\sigma,c,n}$ で表現される ([115])．また，R を weakly symmetric QF 環とするとき，R の任意のべき等元 e に対し eRe もまた weakly symmetric QF 環であり，よってもちろん R は strongly QF 環である．さらに，weakly symmetric ではない基本的直既約 strongly QF 環の中山置換は巡回置換である ([133])．以上の事実をまとめると，次のような結果が得られる：R が基本的直既約環のとき，それが strongly QF 環であることは，R が weakly symmetric QF 環，もしくはある局所 QF 環 Q, $\sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$, $c \in J(Q)$ による skew 行列環 $(Q)_{\sigma,c,n}$ で表現される環であることと必要十分となる ([61])．

9 中山環と skew 行列環

§1 で述べたように，中山環は原田環である．したがって中山環もその frame QF 部分環 $F(R)$ から作られるブロック拡大上階段型剰余環によって表現される．このセクションでは，このような原田環の視点から中山環を調べてみよう ([110], [17])．

R が中山環のとき，その frame QF 部分環 $F(R)$ は中山環になり，特に **frame 中山 QF 部分環**とよばれる．したがって，任意の中山環 R はその frame 中山 QF 部分環 $F(R)$ 上のあるブロック拡大上階段型剰余環で表現され，中山環の構造は結局，中山 QF 環の構造を調べることにより解明できることになる．そして，中山 QF 環の解明にも skew 行列環が有用である．

Q を局所 QF 環とする．Q 上の skew 行列環を定義するために必要な $\sigma \in \underline{\mathrm{Aut}(Q)}$ と $c \in \underline{J(Q)}$ が存在するとき，skew 行列環 $(Q)_{\sigma,c,n}$ は中山自己同型をもつ基本的直既約 QF 環であり，その中山置換は巡回置換であることを §8 で述べた．そしてこのとき，基本的直既約 QF 環 $(Q)_{\sigma,c,n}$ が中山環になることは，c が $cQ = J(Q)$ を満たすことと必要十分である．

さらに話を進めるために，中山環の基本概念であり直既約基本的中山環が常にもつ Kupisch 列と，基本的直既約中山 QF 環の分類法である $K\!N\!P(1\to k)$ 型の定義をしておこう．

定義　R を中山環，$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を R の直交原始べき等元の完全集合とする．任意の $i = 2, 3, \ldots, n$ に対し $T(e_iR_R) \cong T(e_{i-1}J_R)$ が，さらにもし $e_nJ \neq 0$ のときに $T(e_1R_R) \cong T(e_nJ_R)$ も成り立つならば，列 $e_nR, e_{n-1}R, \ldots, e_1R$ は **Kupisch 列**とよばれる．

定義　R を基本的直既約中山 QF 環，$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を R の直交原始べき等元の完全集合で e_nR, $e_{n-1}R$, …, e_1R が Kupisch 列であるものとせよ．このとき，整数 j の n による最小正剰余を $[j]$ で表すと，中山置換は n 以下のある自然数 k によって $e_i \mapsto e_{[i+k-1]}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ と表される置換である．このことを，基本的直既約中山 QF 環は $\boldsymbol{K\!N\!P(1\to k)}$ **型**であるとよぶ．もちろん，$k = 1$ のときは中山置換は恒等置換 (つまり R は中山 weakly symmetric QF 環) である．

R を基本的直既約中山 QF 環，$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を R の直交原始べき等元の完全集合で e_nR, $e_{n-1}R$, …, e_1R が Kupisch 列であるものとし，$Q := e_1Re_1$ とおこう．Q は局所中山 QF 環である．R の構造を $K\!N\!P(1\to n)$ 型，$K\!N\!P(1\to k)$ 型 $(k = 2, 3, \ldots, n-1)$，$K\!N\!P(1\to 1)$ 型に分けて述べよう．

R が $K\!N\!P(1\to n)$ 型基本的直既約中山 QF 環のとき，ある $\sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$ と $cQ = J(Q)$ を満たす c により R は Q 上の skew 行列環 $(Q)_{\sigma,c,n}$ で表現される．

R が $K\!N\!P(1\to k)$ 型 $(k = 2, 3, \ldots, n-1)$ の基本的直既約中山 QF 環のとき，ある $\sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$

と $cQ=J(Q)$ を満たす c が存在し，R は Q 上の skew 行列環 $(\,Q\,)_{\sigma,c,n}$ のそのレギュラー加群の $n-k$-th socle $S_{n-k}((\,Q\,)_{\sigma,c,n(\,Q\,)_{\sigma,c,n}})$，つまり $S:=S(Q_Q)$ とおくと，

$$S_{n-k}((\,Q\,)_{\sigma,c,n(\,Q\,)_{\sigma,c,n}}) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{0\quad 0\quad \cdots\quad 0}}^{k} & \overbrace{\hphantom{S\quad \cdots\quad \cdots\quad S}}^{n-k} \end{array} \\ \begin{array}{r} \vphantom{0} \\ n-k\left\{\vphantom{\begin{matrix}S\\ \vdots\\ S\end{matrix}}\right. \\ k-1\left\{\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\end{matrix}}\right. \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & S & \cdots & \cdots & S \\ S & 0 & & & 0 & S & & S \\ \vdots & S & 0 & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ S & & \ddots & \ddots & & & 0 & S \\ 0 & S & & \ddots & \ddots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & S & & S & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & S & \cdots & S & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cdots\cdots (*)$$

と表されるイデアルによる剰余環で表現される．(具体例は [17, Chapter 7] 参照.)

R が $KNP(1\to 1)$ 型基本的直既約中山 QF 環のとき，R の剰余環 $R/S(R_R)$ は $KNP(1\to n)$ 型基本的直既約中山 QF 環となる．したがって，ある $\overline{\sigma}\in \mathrm{Aut}(Q/S(Q_Q))$ と $\overline{c}\in J(Q/S(Q_R))$ により $R/S(R_R)$ は $Q/S(Q_Q)$ 上の skew 行列環として表現される．しかし，剰余環ではなく R それ自身が，上述した他の場合と同じように 1 つの局所中山 QF 環によって表現されるとは限らない．実際，Q と T を局所中山環で環同型 $\varphi:\overline{Q}\to\overline{T}$ が存在するようなものであるとするとき (ここで，$\overline{Q}:=Q/S(Q_Q)$, $\overline{T}:=T/S(T_T)$ とする)，$\tau\in\mathrm{Aut}(\overline{Q})$ と $c\in J(Q)$ が $\tau(\overline{c})=\overline{c}$, $Qc=J(Q)$，そして任意の $q\in Q$ に対し $\overline{q}c=c\overline{q}=cq$ を満たすように取ることができる．このとき，

$$R:=\begin{pmatrix} Q & \overline{Q} \\ \overline{T} & T \end{pmatrix}$$

とおき，R に和として通常の行列の和を，そして積として

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & \overline{x_{12}} \\ \overline{x_{21}} & x_{22} \end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} y_{11} & \overline{y_{12}} \\ \overline{y_{21}} & y_{22} \end{pmatrix}$$

に対し，

$$XY=\begin{pmatrix} x_{11}y_{11}+\overline{x_{12}}\,\varphi^{-1}(\overline{y_{21}})\,c & x_{11}\overline{y_{12}}+\overline{x_{12}}\,\varphi^{-1}(\overline{y_{22}}) \\ \overline{x_{21}}\,\varphi\tau(\overline{y_{11}})+x_{22}\overline{y_{21}} & \overline{x_{21}}\,\varphi\tau(\overline{y_{12}}\,c)+x_{22}y_{22} \end{pmatrix}$$

を考えるとき，R は中山置換が恒等置換である基本的直既約 QF 環になり，

$$R/S(R_R)\cong\begin{pmatrix} \overline{Q} & \overline{Q} \\ \overline{Q} & \overline{Q} \end{pmatrix}_{\overline{c},\tau,2}$$

が成り立つ．しかし，例えば $Q=\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $T=\mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$ のときを考えると，$Q\ncong T$ である．([17, Example 7.4.2, Remark 7.4.3])

ただし，R が代数閉体 K 上の基本的直既約中山 QF 多元環の場合は，$KNP(1\to 1)$ 型であっても，$KNP(1\to k)$ 型 $(k=2,3,\ldots,n)$ と同じように 1 つの局所中山 QF 環によって表現される．もう少し細かく述べると，$e_1,e_2,\ldots,e_n$, Q を上で定義したものと同じとし，自然数 d を $J(Q)^d\neq 0$ しかし $J(Q)^{d+1}=0$ を満たすように取るとき，$Q=e_1Re_1\cong e_2Re_2\cong\cdots\cong e_nRe_n\cong K[x]/(x^{d+1})$ であり，id を $K[x]/(x^{d+1})$ の恒等写像とするとき，R は skew 行列環 $(\,K[x]/(x^{d+1})\,)_{id,\overline{x},n}$ の上記 (*)

で $i=1$ の場合のイデアル (もちろん $S=(x^d)/(x^{d+1})$) による剰余環として表現できる ([42]).

10 森田自己双対性

定義 環 R, S に対し，平衡的な両側加群 ${}_RU_S$ で ${}_RU$ と U_S が移入的余生成加群となるものが存在するとき，${}_RU_S$ は**森田双対性を定める**とよび，R は S に**左森田双対的** (S は R に**右森田双対的**) とよんで $R \overset{\text{M.d}}{\approx} S$ と表す．R が左アルティン環のとき，${}_RU_S$ が森田双対性を定めることは，反変関手 $\mathrm{Hom}_R(-,U)$, $\mathrm{Hom}_S(-,U)$ が有限生成左R-加群全体の圏と有限生成右S-加群全体の圏との間に反変同値を与えることと必要十分である．

定義 環 R は，$R \overset{\text{M.d}}{\approx} R$ であるとき **(森田)自己双対性**をもつとよぶ．

QF 環が森田自己双対性をもつことは，両側レギュラー加群 ${}_RR_R$ を考えてみれば明らかであるが，では中山環は自己双対性をもつか？ という問題が Mano [87], Haack [40], Dischinger–Müller [26] 等によって 1980 年代に研究され，[26] において肯定的に解決された8)9)．このため，では左原田環も森田双対性をもつか？ が次に研究されることになり，その解決のために次に定義する中山同型が生み出された．

§8 で紹介した中山自己同型は QF 環に対して定義された．次に定義する中山同型は，対象を有限生成な移入的余生成左R-加群をもつ基本的アルティン環に一般化した概念である．

定義 R を有限生成な移入的余生成左R-加群をもつ基本的アルティン環，$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ をその直交原始べき等元の完全集合とし，$S := \mathrm{End}_R(\bigoplus_{i=1}^n E(T({}_RRe_i)))$，そして射影 $\bigoplus_{j=1}^n E(T({}_RRe_j)) \to E(T({}_RRe_i))$ に対応する S のべき等元を f_i とおく．このとき，もし環同型 $\varphi\colon R \to S$ で任意の $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し $\varphi(e_i) = f_i$ を満たすものが存在するとき，この φ を**中山同型**とよぶ．

R が QF 環のときは，中山同型は中山自己同型に他ならない．また，R が中山同型をもつかどうかは，直交原始べき等元の完全集合の取り方によらずに決まる．

そして，R を左原田環とするとき，R が中山同型をもつことは，$F(R)$ が中山自己同型をもつことと必要十分となる．また，基本的 QF 環 F から考えるならば，F が中山自己同型をもつことと，$F(R')$ が F に環同型であるすべての左原田環 R' が中山同型をもつことと，$F(R')$ が F に環同型であるすべての左原田環 R' が森田自己双対性をもつことが同値となる．よって，すべての左原田環が森田自己双対性をもつことは，すべての基本的 QF 環が中山自己同型をもつことや，すべての基本的左原田環が中山同型をもつことと同値であるとも言える ([69])．

話は少し脱線するが，今述べたことを §6 のブロック拡大上階段型剰余環や §7 の skew 行列環に適用すると，森田自己双対性をもつ左原田環の例が簡単に作れる．まずブロック拡大上階段型剰余環の方から具体的に述べよう．局所 QF 環は恒等写像を中山自己同型としてもつので，上記の同値性からその frame QF 部分環が局所環である左原田環はすべて森田自己双対性をもつことになる．frame QF 部分環から左原田環を構成する方法は §6 で解説したので，それにしたがえば森田自己双対性をもつ様々な形の左原田環が容易に構成できる．

次に skew 行列環であるが，§8 で述べたように，Q が局所 QF 環，$\sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$, $c \in J(Q)$ である skew 行列環 $(Q)_{\sigma,c,n}$ は中山自己同型をもつ．したがって，この環を frame QF 部分環とするすべての左原田環は森田自己双対性をもつ．そしてもし c が $cQ \neq J(Q)$ を満たすものであれば，skew 行列環 $(Q)_{\sigma,c,n}$ は中山環ではない QF 環となり，それを frame QF 部分環とするすべての左原田環は中

山環ではない森田自己双対性をもつものとなる．このような σ, c の具体例を 2 つ述べておこう．

例 1　Q を局所 QF 環，$c=0$, σ を Q の恒等写像 1_Q とするとき，skew 行列環 $(Q)_{\sigma,c,n}$ が定義できる．しかし，Q が $J(Q)\neq 0$ であれば $cQ\neq J(Q)$ となる．

例 2　Q を可換局所中山 QF 環で $J(Q)^2\neq 0$, $J(Q)^3=0$ なるものとする．例えば §1 の左原田環ではあるが右原田環ではない例での局所 QF 環 Q はこの性質をもつ．このとき，c を $0\neq c\in J(Q)^2$ なるもの，σ を恒等写像 1_Q とすると，skew 行列環 $(Q)_{\sigma,c,n}$ は定義できるが $cQ\neq J(Q)$ である．

話を元に戻すと，この同値性より，左原田環は森田自己双対性をもつか？ という問題を解決するためには，すべての基本的 QF 環が中山自己同型をもつこと，もしくはすべての基本的左原田環が中山同型をもつことを示せばよいことになり，その証明が探求された．しかし 2001 年，小池寿俊により Kraemer が [82] において中山自己同型をもたない QF 環の例を与えていたとの指摘があり (Kraemer の本では，weakly symmetric 自己双対性 (定義は次ページ) をもたない QF 環の例として掲載されていた)，この問題は否定的に解決されることになった ([75])．この例は，$A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n\geq 2)$ を基本的アルティン環，${}_{A_1}U_{1A_2}$, ${}_{A_2}U_{2A_3}, \ldots, {}_{A_n}U_{nA_1}$ を森田 duality を定義する両側加群とし，

$$R:=\begin{pmatrix} A_1 & U_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & U_2 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & A_{n-1} & U_{n-1} \\ U_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 & A_n \end{pmatrix}$$

とおいて，R に普通の行列の和と積を $U_iU_j=0$ $(0\leq i,j\leq n)$ によって定めるとき，R は QF 環であり，さらに，整数 i の n による最小正剰余を $[i]$ で表すとき，R が中山自己同型をもつことは，各 $i=1,2,\ldots,n$, R の任意の原始べき等元 e に対して $T({}_{A_i}A_ie)\cong S({}_{A_i}U_i\tau_i(e))$ が成り立つような環同型 $\tau_i: A_i\to A_{[i+1]}$ と $(\tau_i,\tau_{[i+1]})$-semilinear な同型写像 $\varphi_i: U_i\to U_{[i+1]}$ (つまり，任意の $u\in U_i$, $a\in A_i$, $a'\in A_{[i+1]}$ に対し $\varphi_i(aua')=\tau_i(a)\varphi(u)\tau_{[i+1]}(a')$ が成り立つ加法群同型) が存在することと必要十分であるという性質に注目して，この同値条件を満たさない具体例を構成している．さらに，この例を用いて，たとえ両側原田環であっても森田自己双対性をもたない例も作られた ([75])．

しかし左原田環は，次に定義する almost 自己双対性をもつことが証明されている ([77])．

定義　環 R に対して，環の列 $R_1,R_2,\ldots,R_n$ が $R_1\overset{\mathrm{M.d}}{\approx}R_2\overset{\mathrm{M.d}}{\approx}\cdots\overset{\mathrm{M.d}}{\approx}R_n$ と $R_1=R_n=R$ を満たすように取れるとき，R は **almost 自己双対性**をもつとよぶ．もちろん，$n=1$ のときが森田自己双性である．

左原田環が almost 自己双対性をもつことから，左準原田環についての同様の問題が生じるが，イデアルを有限個しかもたない (例えば有限表現型の環や局所分配的環はこのような性質をもつ) 左準原田環は almost 自己双対性をもつことが分かっている．さらにこのことから局所分配的右QF-2 環も almost 自己双対性をもつことが分かる ([78])．しかし，局所分配的右QF-2 環でさえ森田自己双対性をもつかどうかは未解決である．

森田自己双対性の問題は，次のようなさらに強い条件も研究されている．

定義　環 R に対し，森田自己双対性を定める両側加群 ${}_RU_R$ で R の任意の原始べき等元 e に対して

$\mathrm{Hom}_R(T({}_R Re), {}_R U_R)_R \cong T(eR_R)$, つまり $S(eU_R) \cong T(eR_R)$ を満たすようなものが取れるとき，${}_R U_R$ は **weakly symmetric 自己双対性**を定める，または R は **weakly symmetric 自己双対性**をもつとよぶ.

R が QF 環のとき，両側加群 ${}_R R_R$ が weakly symmetric 自己双対性を定めることは，R が weakly symmetric QF 環であることと必要十分である．したがって，QF 環は一般的には weakly symmetric とは限らないので，QF 環は森田自己双対性はもつが weakly symmetric 自己双対性はもつとは限らないことになる.

weakly symmetric 自己双対性よりさらに強い自己双対性として，次の good 自己双対性がある.

定義 環 R は, 森田自己双対性を定める両側加群 ${}_R U_R$ が R の任意のイデアル I に対して $l_R l_U(I) = I$ (ここで l_R や l_U は左零化集合) を満たすように取れるとき，**good 自己双対性**をもつとよぶ.

good 自己双対性をもつ環は weakly symmetric 自己双対性をもつので，このセクションで定義した自己双対性を条件の強いものから順に並べると，good 自己双対性 $\to$ weakly symmetric 自己双対性 $\to$ 森田自己双対性 $\to$ almost 自己双対性となる.

中山環は good 自己双対性をもつ ([78])．さらに中山環より条件の弱い局所分配的右単列環も good 自己双対性をもつことや，環 R が good 自己双対性をもてば，その diagonally complete 部分環や任意の剰余環もまた good 自己双対性をもつことが知られている.

局所分配的な右QF-2 環 R が almost 自己双対性をもつことを上で述べたが，$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ を R の直交原始べき等元の基本集合とするとき，$n \leq 3$ であれば R は森田自己双対性をもつ．また，$S(R_R)e_i \neq 0$ となる e_i の数が 2 個以下であれば R は good 自己双対性をもつ.

また，左原田環は必ずしも森田自己双対性をもたないので，もちろん左準原田環も森田自己双対性をもつとは限らないが，R を左準原田環とするとき，R が good 自己双対性をもつことは，R の右極大商環が good 自己双対性をもつことや，左準原田環 $\Lambda(R)$ が good 自己双対性をもつことや，左準原田環 $\Gamma(R)$ が good 自己双対性をもつことや，QF 環 $\Gamma^m(R)$ が good 自己双対性をもつことは同値である ($\Lambda(R)$, $\Gamma(R)$, $\Gamma^m(R)$ の定義は§6 参照)．そしてこのことから，R を QF-3 左準原田環とし fR を極小忠実右R-加群とすると fRf が中山環ならば R は good 自己双対性をもつことや，右 non-singular 左準原田環が good 自己双対性をもつことは証明されている ([78]).

アルティン環の自己双対性の話をするとき，exact 環に関する東屋予想は忘れてはならない.

定義 両側アルティン環 R は，両側 (R, R)-加群としての組成列 ${}_R R_R = I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_{s-1} \supset I_s = 0$ をもち，かつ各 $i = 1, 2, \dots, s$ に対し $\mathrm{End}_R({}_R I_{i-1}/I_i)$ が R の元の右乗法で与えられるとき **exact 環**とよぶ．この概念は組成列の選び方に依存しないし，左右対称でもある.

局所分配的環は exact 環である．よってもちろん，中山環も exact 環である.

exact 環は森田自己双対性をもつと東屋五郎は [6] で予想した．局所分配的環は exact 環であるので，もしこの東屋予想が肯定的であれば，当然局所分配的環も森田自己双対性をもつことになるが，現時点では局所分配的環でさえ未解決である (条件を付加した局所分配的右単列環が good 自己双対性をもつことは上で述べた通りである)．ただ，もしすべての exact 環が森田自己双対性をもてば，すべての exact 環が weakly symmetric 自己双対性をもつことや，もしすべての局所分配的環が森田自己双対性をもてば，すべての局所分配的環が good 自己双対性をもつことは分かっている．さらに，上で局所分配的な右QF-2 環がある条件下で森田自己双対性や good 自己双対性をもつことを述べたが，

すべての局所分配的な右QF-2環が森田自己双対性をもつことは，すべての基本的局所分配的QF環が weakly symmetric 自己同型をもつことと必要十分であることが分かっている ([78]).

以上，原田環，準原田環の導入を契機としてアルティン環の森田自己双対性が徐々に明らかになりつつあることを述べたが，まだまだ未解決の部分が多く，取り組む価値の高い領域だと言える．また，注釈1) で軽くふれるだけに留めた Faith 予想をはじめとして，この論説の各セクションで述べた事柄にはまだまだ未解決の部分がたくさん存在しており，ある部分の解決がさらに新たな謎を生んでいる状況である.

注　釈

1) 右レギュラー加群も左レギュラー加群も両方移入的であるような片側完全環がQF環になることは，1966年にOsofskyによって証明されている ([117]). このため，左右どちらか片方のレギュラー加群が移入的である片側 (もしくは両側) 完全環もQF環になるのか？ という問題が数多くの研究者によって研究されることになったが解決しなかった．そして1976年にFaithは，環の条件をより強めた，片方のレギュラー加群が移入的であるsemi-primary環はQF環になるのか？ という問題を否定的に予想した ([30]). これが**Faith予想**とよばれるQF環に関する最重要な未解決問題である．この論説文で紹介している原田環に関する理論を用いてこの問題を解決する試みが現在でも続けられている．その詳細は [17, Chapter 10] 参照.
2) 原田学のレクチャーノート [46] にその成果がまとめられている.
3) この同値性は，§6で i-pair の定義の折に紹介したFullerの定理の一般化である次の定理 [10] から導き出される：左アルティン環 R とその原始べき等元 e, f に対して，直既約移入的左 R-加群でそのsocleが $T({}_RRf)$ と同型のものは準射影的であることと (このとき，この加群は ${}_RRe/r_{Re}(fR)$ の形で表現される)，$S(fR_R)\cong T(eR_R)$ かつ $S({}_{fRf}fRe_f)$ は左 fRf-加群として単純であることと，右イデアル fR は準移入的でありそのsocleは $T(eR_R)$ と同型であることとが同値である．この定理とFullerの定理は [91], [62], [63] において R-加群への一般化が行われ，理論がさらに整理された.
4) almost N-projective や almost N-injective に似た概念として generalized N-projective と generalized N-injective が存在し ([41])，活発に研究が行われている．generalizedの方はalmostのように2つの条件のいずれかが成り立つという定義ではなく，almostの2つの条件に対応するものが1つの条件に組み込まれており，almostより条件が強い概念となっている．しかし，直既約加群に対しては両者の概念は一致する.
5) almost projective 加群と almost injective 加群の定義は [57] において双対的ではない形で定義された．ここで与えた定義は，後年 [123] において双対的に定義し直されたものである.
6) この定理はFullerの定理とよばれ，[9], [132] において再考察，一般化が行われ，さらに注釈3) で記述したような様々な一般化が行われた.
7) skew行列環と同じ考えの環は，Kupischにより1975年にVPE-ringとして定義されている.
8) Dischinger–Müllerは中山環が weakly symmetric 自己双対性をもつことを証明している.
9) 中山環は自己双対性をもつか？ という問題はDischinger–Müllerによって解決されたが，その後の1986年，既に1968年にAmdalとRingdalが解決していたことをWaschbüschが指摘し，そのアイディアを用いた証明を発表した ([129]). しかしこれらの証明は技巧的であり読みやすい証明ではなかったため，その後も [69], [3] で別証明が与えられることになる．さらに，これらの考え方を生かして [78] において中山環がgood自己双対性をもつことが示された.

文　献

[1] K. I. Amdal and F. Ringdal, Catégories unisérialles, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, **267** (1968), A85–A87, A247–A249.

[2] F. W. Anderson and K. R. Fuller, Rings and Categories of Modules. 2nd ed., Grad. Texts in Math., **13**, Springer, 1992.

[3] P. N. Ánh, Selfdualities and serial rings, Bull. London Math. Soc., **38** (2006), 411–420.

[4] G. Azumaya, A duality theory for injective modules, Amer. J. Math., **81** (1959), 249–278.

[5] G. Azumaya, Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull–Remak–Schmidt's theorem, Nagoya Math. J., **1** (1950), 117–124.

[6] G. Azumaya, Exact and serial rings, J. Algebra, **85** (1983), 477–489.

[7] Y. Baba, Note on almost M-injectives, Osaka J. Math., **26** (1989), 687–698.

[8] Y. Baba and M. Harada, On almost M-projectives and almost M-injectives, Tsukuba J. Math., **14** (1990), 53–69.

[9] Y. Baba and K. Oshiro, On a Theorem of Fuller, J. Algebra, **154** (1993), 86–94.

[10] Y. Baba, Injectivity of quasi-projective modules, projectivity of quasi-injective modules, and projective cover of injective modules, J. Algebra, **155** (1993), 415–434.

[11] Y. Baba and K. Iwase, On quasi-Harada rings, J. Algebra, **185** (1996), 544–570.

[12] Y. Baba, Some classes of QF-3 rings, Comm. Algebra, **28** (2000), 2639–2669.

[13] Y. Baba, On Harada rings and quasi-Harada rings with left global dimension at most 2, Comm.

Algebra, **28** (2000), 2671–2684.

[14] Y. Baba, On self-duality of Auslander rings of local serial rings, Comm. Algebra, **30** (2002), 2583–2592.

[15] Y. Baba, On quasi-projective modules and quasi-injective modules, Sci. Math. Jpn., **63** (2006), 113–120.

[16] Y. Baba, Self-duality of Harada ring of a component type, J. Algebra Appl., **7** (2008), 275–298.

[17] Y. Baba and K. Oshiro, Classical Artinian Rings and Related Topics, World Scientific, Hackensack, NJ, 2009.

[18] R. Brauer and C. Nesbitt, On the regular representations of algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **23** (1937), 236–240.

[19] J. Clark, On a question of Faith in commutative endomorphism rings, Proc. Amer. Math. Soc., **98** (1986), 196–198.

[20] J. Clark and D. V. Huynh, A note on perfect self-injective rings, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), **45** (1994), 13–17.

[21] J. Clark and D. V. Huynh, When is a self-injective semiperfect ring quasi-Frobenius?, J. Algebra, **165** (1994), 531–542.

[22] J. Clark and R. Wisbauer, $\sum$-extending modules, J. Pure Appl. Algebra, **104** (1995), 19–32.

[23] J. Clark, C. Lomp, N. Vanaja and R. Wisbauer, Lifting Modules. Supplements and Projectivity in Module Theory, Front. Math., Birkhäuser, Boston, 2006.

[24] R. R. Colby and E. A. Rutter, Jr., Generalizations of QF-3 algebras, Trans. Amer. Math. Soc., **153** (1971), 371–386.

[25] P. Dân, Right perfect rings with the extending property on finitely generated free modules, Osaka J. Math., **26** (1989), 265–273.

[26] F. Dischinger and W. Müller, Einreihig zerlegbare artinsche Ringe sind selbstdual, Arch. Math., **43** (1984), 132–136.

[27] F. Dischinger and W. Müller, Left PF is not right PF, Comm. Algebra., **14** (1986), 1223–1227.

[28] N. V. Dung, D. V. Huynh, P. F. Smith and R. Wisbauer, Extending Modules, Pitman Res. Notes Math. Ser., **313**, Longman Scientific & Technical, London, 1994.

[29] D. Eisenbud and P. Griffith, Serial rings, J. Algebra, **17** (1971), 389–400.

[30] C. Faith, Algebra. II. Ring Theory, Grundlehren Math. Wiss., **191**, Springer, 1976.

[31] C. Faith and D. V. Huynh, When self-injective rings are QF: A report on a problem, J. Algebra Appl., **1** (2002), 75–105.

[32] C. Faith, Injective Modules and Injective Quotient Rings, Lecture Notes Pure and Appl. Math., **72**, Marcel Dekker, New York, 1982.

[33] W. Von Frobenius, Theorie der hyperkomplexen Größen. I, II, Sitzung. der phys.-math. K1 (1903), 504–538, 634–645.

[34] L. Fuchs, On quasi-injective module, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), **23** (1969), 541–546.

[35] K. R. Fuller, Generalized uniserial rings and their Kupisch series, Math. Z., **106** (1968), 248–260.

[36] K. R. Fuller, The structure of QF-3 rings, Trans. Amer. Math. Soc., **134** (1968), 343–354.

[37] K. R. Fuller, On direct representations of quasi-injectives and quasi-projectives, Arch. Math. (Basel), **20** (1969), 495–502.

[38] K. R. Fuller, On indecomposable injectives over artinian rings, Pacific J. Math., **29** (1969), 115–135.

[39] K. R. Goodearl, Ring Theory. Nonsingular Rings and Modules, Pure and Appl. Math., **33**, Marcel Dekker, New York, 1976.

[40] J. K. Haack, Self-duality and serial rings, J. Algebra, **59** (1979), 345–363.

[41] K. Hanada, Y. Kuratomi and K. Oshiro, On direct sums of extending modules and internal exchange property, J. Algebra, **250** (2002), 115–133.

[42] A. Hanaki, S. Koshitani and K. Oshiro, Nakayama algebras over algebraically closed fields, preprint.

[43] T. A. Hannula, The Morita context and the construction of QF rings, In: Orders, Group Rings and Related Topics, Columbus, OH, USA, 1972, (eds. J. S. Hsia, M. L. Madan and T. G. Ralley), Lecture Notes in Math., **353**, Springer, 1973, pp. 113–130.

[44] M. Harada, Nonsmall modules and noncosmall modules, In: Ring Theory, Proceedings of 1978 Antwerp Conference, (ed. F. Van Oystaeyen), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **51**, Dekker, New York, 1979, pp. 669–690.

[45] M. Harada, On one-sided QF-2 rings. I, II, Osaka J. Math., I, **17** (1980), 421–431; II, **17** (1980), 433–438.

[46] M. Harada, Factor Categories with Applications to Direct Decomposition of Modules, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **88**, Marcel Dekker, New York, 1983.

[47] M. Harada and K. Oshiro, On extending property on direct sums of uniform modules, Osaka J. Math., **18** (1981), 767–785.

[48] M. Harada and A. Tozaki, Almost M-projectives and Nakayama rings, J. Algebra, **122** (1989), 447–474.

[49] M. Harada and T. Mabuchi, On almost M-projectives, Osaka J. Math., **26** (1989), 837–848.

[50] M. Harada, On almost relative projectives over perfect rings, Osaka J. Math., **27** (1990), 655–665.

[51] M. Harada, On almost relative injectives on Artinian modules, Osaka J. Math., **27** (1990), 963–971.

[52] M. Harada, Direct sums of almost relative in-

jective modules, Osaka J. Math., **28** (1991), 751–758.

[53] M. Harada, Almost hereditary rings, Osaka J. Math., **28** (1991), 793–809.

[54] M. Harada, Hereditary rings and relative projectives, Osaka J. Math., **28** (1991), 811–827.

[55] M. Harada, Characterizations of right Nakayama rings, Glasgow Math. J., **34** (1992), 91–102.

[56] M. Harada, Note on almost relative projectives and almost relative injectives, Osaka J. Math., **29** (1992), 435–446.

[57] M. Harada, Almost projective modules, J. Algebra, **159** (1993), 150–157.

[58] M. Harada, Almost QF rings and almost QF$^{\#}$ rings, Osaka J. Math., **30** (1993), 887–892.

[59] M. Harada, Artinian rings related to relative almost projectivity. I, II, Osaka J. Math., I, **32** (1995), 135–153; II, **32** (1995), 577–589.

[60] D. Herbera and A. Shamsuddin, On self-injective perfect rings, Canad. Math. Bull., **39** (1996), 55–58.

[61] M. Hoshino, Strongly quasi-Frobenius rings, Comm. Algebra, **28** (2000), 3585–3599.

[62] M. Hoshino and T. Sumioka, Injective pairs in perfect rings, Osaka J. Math., **35** (1998), 501–508.

[63] M. Hoshino and T. Sumioka, Colocal pairs in perfect rings, Osaka J. Math., **36** (1999), 587–603.

[64] D. V. Huynh and P. Dân, Some characterizations of right co-H-rings, Math. J. Okayama Univ., **34** (1992), 165–174.

[65] M. Ikeda, A characterization of quasi-Frobenius rings, Osaka Math. J., **4** (1952), 203–209.

[66] M. Ikeda and T. Nakayama, On some characteristic properties of quasi-Frobenius and regular rings, Proc. Amer. Math. Soc., **5** (1954), 15–19.

[67] L. Jeremy, Modules et anneaux quasi-continus, Canad. Math. Bull., **17** (1974), 217–228.

[68] J. Kado, The maximal quotient ring of a left H-rings, Osaka J. Math., **27** (1990), 247–251.

[69] J. Kado and K. Oshiro, Self-duality and Harada rings, J. Algebra, **211** (1999), 384–408.

[70] T. Kato, Self-injective rings, Tohoku Math. J. (2), **19** (1967), 485–495.

[71] D. Keskin, On lifting modules, Comm. Algebra, **28** (2000), 3427–3440.

[72] I. Kikumasa and H. Yoshimura, Commutative algebras with radical cube zero, Comm. Algebra, **31** (2003), 1837–1858.

[73] I. Kikumasa, K. Oshiro and H. Yoshimura, A construction of local QF rings and its characterization, Comm. Algebra, **40** (2012), 4639–4660.

[74] K. Koike, On selfinjective semiprimary rings, Comm. Algebra, **28** (2000), 4303–4319.

[75] K. Koike, Examples of QF rings without Nakayama automorphism and H-rings without self-duality, J. Algebra, **241** (2001), 731–744.

[76] 小池寿俊, Harada環とserial環の大局次元について, 日本数学会秋季総合分科会代数学分科会予稿集, (2002), 36–37.

[77] K. Koike, Almost self-duality and Harada rings, J. Algebra, **254** (2002), 336–361.

[78] K. Koike, Self-duality of quasi-Harada rings and locally distributive rings, J. Algebra, **302** (2006), 613–645.

[79] K. Koike, Azumaya's conjecture and Harada rings, Proceedings of the 39th Symposium on Ring Theory and Representation Theory, Hiroshima, 2006, (ed. M. Kutami), 2007, pp. 90–95.

[80] K. Koike, Morita duality and recent development, In: Ring Theory 2007, Tokyo, 2007, (eds. H. Marubayashi, K. Masaike, K. Oshiro and M. Sato), World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2009, pp. 101–115.

[81] G. Köthe, Verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexem Operatorenring, Math. Z., **39** (1935), 31–44.

[82] J. Kraemer, Characterizations of the existence of (quasi-)self-duality for complete tensor rings, Algebra Ber., **56**, Verlag Reinhard Fischer, München, 1987.

[83] H. Kupisch, A characterization of Nakayama rings, Comm. Algebra, **23** (1995), 739–741.

[84] Y. Kuratomi, On direct sums of lifting modules and internal exchange property, Comm. Algebra, **33** (2005), 1795–1804.

[85] J. Lambek, Lectures on rings and modules, Blaisdell, Waltham, Toronto, London, 1966.

[86] W. T. H. Loggie, A simplified proof of Oshiro's theorem for co-H-rings, Rocky Mountain J. Math., **28** (1998), 643–648.

[87] T. Mano, The invariant systems of serial rings and their applications to the theory of self-duality, In: Proceedings of 16th Symposium on Ring Theory, Tokyo, 1983, (ed. T. Kato), Okayama Math. Lectures, Okayama Univ., 1983, pp. 48–56.

[88] T. Mano, Uniserial rings and skew polynomial rings, Tokyo J. Math., **7** (1984), 209–213.

[89] S. H. Mohamed and B. J. Müller, Ojective modules, Comm. Algebra, **30** (2002), 1817–1827.

[90] S. H. Mohamed and B. J. Müller, Co-ojective modules, Egyptian Math. Soc., **12** (2004), 83–96.

[91] M. Morimoto and T. Sumioka, Generalizations of theorems of Fuller, Osaka J. Math., **34** (1997), 689–701.

[92] K. Morita and H. Tachikawa, Character modules, submodules of a free module, and quasi-Frobenius rings, Math. Z., **65** (1956), 414–428.

[93] B. J. Müller and S. T. Rizvi, Direct sums of indecomposable modules, Osaka J. Math., **21** (1984), 365–374.

[94] I. Murase, On the structure of generalized uniserial rings. I, II, III, Sci. Papers College Gen. Ed.

Univ. Tokyo, I, **13** (1963), 1–22; II, **13** (1963), 131–158; III, **14** (1964), 11–25.

[95] I. Murase, Generalized uniserial group rings. I, II, III, Sci. Papers College Gen. Ed. Univ. Tokyo, I, **15** (1965), 15–28; II, **15** (1965), 111–128.

[96] T. Nakayama, On Frobenius algebras. I, II, Ann. of Math. (2), I, **40** (1939), 611–633; II, **42** (1941), 1–21.

[97] T. Nakayama, Note on uni-serial and generalized uni-serial rings, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **16** (1940), 285–289.

[98] T. Nakayama, On algebras with complete homology, Abh. Math. Sem. Univ. Hanburg, **22** (1958), 300–307.

[99] T. Nakayama and C. Nesbitt, Note on symmetric algebras, Ann. of Math. (2), **39** (1938), 659–668.

[100] 中山正・東屋五郎, 代数学 II, 岩波書店, 1954.

[101] C. J. Nesbitt, On the regular representations of algebras, Ann. of Math. (2), **39** (1938), 634–658.

[102] C. J. Nesbitt and R. M. Thrall, Some ring theorems with applications to modular representations, Ann. of Math. (2), **47** (1946), 551–567.

[103] W. K. Nicholson and M. F. Yousif, On perfect simple-injective rings, Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997), 979–985.

[104] W. K. Nicholson and M. F. Yousif, Quasi-Frobenius Rings, Cambridge Tracts in Math., **158**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[105] K. Nonomura, On Nakayama rings, Comm. Algebra, **32** (2004), 589–598.

[106] K. Oshiro, Continuous modules and quasi-continuous modules, Osaka J. Math., **20** (1983), 681–694.

[107] K. Oshiro, Semiperfect modules and quasi-semiperfect modules, Osaka J. Math., **20** (1983), 337–372.

[108] K. Oshiro, Lifting modules, extending modules and their applications to QF-rings, Hokkaido Math. J., **13** (1984), 310–338.

[109] K. Oshiro, Lifting modules, extending modules and their applications to generalized uniserial rings, Hokkaido Math. J., **13** (1984), 339–346.

[110] K. Oshiro, Structure of Nakayama rings, In: Proceedings of the 20th Symposium on Ring Theory, Okayama, 1987, (ed. H. Marubayashi), Okayama Univ., Okayama, 1987, pp. 109–133.

[111] K. Oshiro, On Harada rings. I, II, III, Math. J. Okayama Univ., I, **31** (1989), 161–178; II, **31** (1989), 179–188; III, **32** (1990), 111–118.

[112] K. Oshiro and K. Shigenaga, On H-rings with homogeneous socles, Math. J. Okayama Univ., **31** (1989), 189–196.

[113] K. Oshiro, Theories of Harada in Artinian rings and applications to classical Artinian rings, In: International Symposium on Ring Theory, Kyongju, 1999, (eds. G. F. Birkenmeier, J. K. Park and Y. S. Park), Trends Math., Birkhäuser, Boston, MA, 2001, pp. 279–301.

[114] K. Oshiro and R. Wisbauer, Modules with every subgenerated module lifting, Osaka J. Math., **32** (1995), 513–519.

[115] K. Oshiro and S. H. Rim, On QF-rings with cyclic Nakayama permutations, Osaka J. Math., **34** (1997), 1–19.

[116] 大城紀代市, アルチン環, 研究集会 '環論とその周辺' 報告集 (2006), 1–39.

[117] B. L. Osofsky, A generalization of quasi-Frobenius rings, J. Algebra, 4 (1966), 373–387.

[118] G. E. Puninski, Serial Rings, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[119] M. Rayar, Small and Cosmall Modules, Ph. D. Dissertation, Indiana Univ., 1971.

[120] C. M. Ringel and H. Tachikawa, QF-3 rings, J. Reine Angew. Math., **272** (1974), 49–72.

[121] D. Simson, Dualities and pure semisimple rings, In: Abelian Groups, Module Theory, and Topology, Padua, 1997, (eds. D. Dikranjan and L. Salce), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **201**, Marcel Dekker, New York, 1998, pp. 381–388.

[122] 住岡武, QF-3 環, 月刊マセマティクス 1, **10** (1980), 8–15.

[123] T. Sumioka and S. Tozaki, On almost QF-rings, Osaka J. Math., **33** (1996), 649–661.

[124] H. Tachikawa, Quasi-Frobenius Rings and Generalizations. QF-3 and QF-1 Rings, Lecture Notes in Math., **351**, Springer, 1973.

[125] R. M. Thrall, Some generalization of quasi-Frobenius algebras, Trans. Amer. Math. Soc., **64** (1948), 173–183.

[126] S. Tozaki, Characterizations of almost QF rings, Osaka J. Math., **36** (1999), 195–201.

[127] N. Vanaja and V. M. Purav, Characterisations of generalized uniserial rings in terms of factor rings, Comm. Algebra, **20** (1992), 2253–2270.

[128] N. Vanaja and V. N. Purav, A note on generalised uniserial ring, Comm. Algebra, **21** (1993), 1153–1159.

[129] J. Waschbüsch, Self-duality of serial rings, Comm. Algebra, **14** (1986), 581–589.

[130] W. Xue, Rings with Morita Duality, Lecture Notes in Math., **1523**, Springer, 1992.

[131] W. Xue, A note on perfect self-injective rings, Comm. Algebra, **24** (1996), 749–755.

[132] W. Xue, On a theorem of Fuller, J. Pure Appl. Algebra, **122** (1997), 159–168.

[133] Y. Yukimoto, On decomposition of strongly quasi-Frobenius rings, Comm. Algebra, **28** (2000), 1111–1113.

(2014 年 4 月 11 日提出)

(ばば よしとも・大阪教育大学教員養成課程)

2015年7月24日　発行　　Printed in Japan
ⓒ　編集・発行　〒110-0016　東京都台東区台東1-34-8　日本数学会
編集責任者　〒338-8570　さいたま市桜区下大久保255
埼玉大学大学院理工学研究科内　福井敏純
定価　(本体945円＋税)

発売　〒101-8002　東京都千代田区一ツ橋2-5-5　株式会社岩波書店
(振替00160-0-26240番)
印刷　〒114-0004　東京都北区堀船1-23-31　株式会社リーブルテック
ISSN　0039—470X　　雑誌05413-7