角の三等分問題

— 数学専門科目での実践 —

桑田勝矢（大阪教育大学大学院）　新濱光紀（大阪教育大学大学院）　馬場良始（大阪教育大学 数学教育講座）

(平成 27 年 3 月 31 日受付)

概要：「ギリシャの三大作図問題」は, 19 世紀に代数学の発展によってようやく否定的に解決された. その解法は, 拡大体論が有用であることを示す手軽な例になっており, 3 回生の代数学の授業に取り入れている. この論文では, 現場の中学校の先生に理解していただけることを目指して, その様子を紹介する.

検索語：ギリシャの三大作図問題, 角の三等分問題, 立方体倍積問題, 円積問題, 体

I. 始めに

定木とコンパスを使って, 与えられた角を二等分する半直線の作図方法は中学 1 年生で学ぶ. では, 三等分する半直線を引くにはどのようにすればよいだろうか？この問題はギリシャ時代から考え続けられてきた問題であり,「立方体倍積問題」「円積問題」と合わせて「ギリシャの三大作図問題」と呼ばれてきた. これらの問題の解決は, 代数学の視点から考察されるようになった後の, 何と 19 世紀になってからで,「角の三等分問題」と「立方体倍積問題」は 1837 年にピエール・ローラン・ワンツェルによって, そして「円積問題」は 1882 年にフェルディナント・フォン・リンデマンによって円周率 π が超越数であることが証明されたため, この論文で紹介するのと同じアイディアで否定的に解決された. (つまり,「角の三等分問題」に関しては,「定木とコンパスだけでは三等分線が作図できない角が存在する」ことが証明された.)

「ギリシャの三大作図問題」は, 多くの幾何学の本で解説されているし, もちろん代数学の体論の本にも解説されている. しかし, 幾何学の本では, その解法の代数的な部分については触れられていない, もしくは触れたとしても緻密な議論が行われないで, さらっと書かれている部分にギャップが潜んでいることがほとんどである. 一方, 代数学の専門書では, その簡易さからか, 現場の中学校の先生が気軽に参照できるような初学的な書き方はされていない.

数学教育専攻の数学専門科目「代数学 I」「代数学 II」(3 回生) では, 通年でガロア理論の理解を目指した体論の講義を行っている. 前期で開講される「代数学 I」では体の拡大, 単純拡大体の構造について学んだ後, その応用例として 2 週間に渡り「角の三等分問題」について解説している.

この論文では, その講義の様子を紹介し, 合わせて授業ではレポート課題とした「立方体倍積問題」「円積問題」についても解説する. 解説は, 大学 1 年生が線形代数学で学ぶベクトル空間の知識は仮定したものの, 現場の先生方にも理解して頂けるものになっていると思う. 最後に,「角の三等分問題」の研究の歴史にも簡単に触れ, 読者のこの分野への興味を喚起したい.

II. ギリシャ三大作図問題の発端

我々が中学校で学んだ幾何学は初等幾何学と呼ばれ, 少なくとも 3000 年以上の歴史をもつ. その間, 様々な難問が生まれ, 多くの数学者を悩ませてきた. 中でも, ギリシャの三大作図問題は特に有名なもので, 西暦紀元前 5, 6 世紀頃にギリシャの数学者たちによって研究され始めた. その三つの問題とは,

1. 立方体倍積問題：与えられた立方体の体積の 2 倍に等しい体積をもつ立方体を作図せよ.
2. 円積問題 (円の方形化問題)：与えられた円と等しい面積をもつ正方形を作図せよ.
3. 角の三等分問題：与えられた角を三等分する半直線を作図せよ.

第 1 の問題は『デロスの問題』という別名をもつ. デロスとは地中海に浮かぶ小さな島の 1 つであり, そこには神殿があり, 立方体の祭壇があったと言われている. あるとき, この島を伝染病が襲った. これを大いに恐れた人々は, デロスの守護神であるアポロンの神託を仰いだ. すると, 祭殿を 2 倍にせよという神のお告げがあった. 早速, 縦と横の長さを 2 倍にした祭殿に取り換えたのだが, 伝染病の勢いは衰えることはなかった. 不信感をもった人々がもう一度神託を仰ぐと,「2 倍といったのは, 体積のことであり, 辺の長さではない」とのお告げがあった. そこで, 彼らは慌てて祭殿の体積を 2 倍にしようとしたが, これが思いのほか難問であった. 人々はプラトン (B.C.427〜B.C.347) に相談し, プラトンとその弟子たちは特殊な器械を使ってようやくこの問題を解決した. しかしプラトンは, 「このような方法は幾何学の美点を放棄し破壊するものである. 定木とコンパスだけで解くのが望ましい」と述べ, 研究を続けた. これがこの問題の始まりとされている. やがて, デロスの伝染病は収束していったが, 問題は残り続けた. 多くの人々がこの問題の解決に係わったが, 否定的に解決されたのは先に述べたように 1837 年 (何と 2000 年以上の歳月を経てから) であった.

第 2 は, アナクサゴラス (B.C.500〜B.C.428) が牢獄の中で研究に没頭したとローマの歴史家プルタルコスが書き記しており, それがこの問題に関する歴史上最初の記述とされている問題である. アナクサゴラスは,「自然について」という本で, 当時信じられていた「太陽は神である」ことを否定し,「真っ赤に燃える火の石である」と主張し, 投獄された. 先に述べたように, この問題は 1882 年に否定的に解決された.

第 3 の問題も, 前の 2 つの問題と同じく長い歴史をもっている. 西暦紀元前 5, 6 百年頃すでに, ギリシャの数学者たちは, この問題に取り組んでいたと言われている. 任意の与えられた角を二等分する半直線の作図は容易であるので, では三等分は？と考えるのは自然なことである. しかし, 外見上の簡潔さに関わらず, この問題も実に困難なもので, 否定的に解決されたのは先に述べたように 1837 年である.

これら 3 つの作図問題には共通してある制限がかけられる. その制限とは, 定木 (目盛りが付いているものを「定規」, 目盛りが付いていないものを「定木」と表す) とコンパスのみを有限回用いて作図するというものである. 言い換えると,

- 与えられた 2 つの点を直線で結ぶこと,
- 与えられた 2 つの点の 1 つを中心とし, もう 1 点を通る円を描くこと,

のみが有限回許されている. ちなみに, このように作図を定木とコンパスのみに制限したのは, 上述したようにプラトン (B.C.500〜B.C.428) であると伝えられており, 元々制限があったわけではない. その後, ユークリッド (B.C.330 頃〜B.C.275 頃) の「原論」では, 作図のルールとして『公準 (要請) 1, 3』で直線を引くことと, 円を描くことが保証されている. 現在の中学校の狭義の作図が定木とコンパスを使ったものに制限されているのは, これを根拠としているようである. そして, ギリシャ・ローマ時代, またルネッサンス期において, 作図問題は数学の典型的な問題であり続けた.

II. 準備 (数体論)

まずは, 証明に必要な拡大体論を紹介しよう. ただし, この論文で必要とされるのは実数体の部分体だけであるので, 体としてそのようなもののみを考える.

定義.

- 少なくとも 2 つの元を含む実数の集合 Q は, 次の (1), (2) を満たすとき **(実数体の部分) 体** と呼ぶ.

  (1) 任意の $a, b \in Q$ に対し, $a - b \in Q$ が成り立ち,

  (2) 任意の $a, b \in Q$ (ただし, $b \neq 0$) に対し $\frac{a}{b} \in Q$ が成り立つ.

  この定義から, 体 Q とは加減乗除について閉じている (つまり, 任意の $a, b \in Q$ に対し $a+b, a-b, ab \in Q$ かつ, もし $b \neq 0$ ならば $\frac{a}{b} \in Q$ も成り立つ) と言える.

  [∵ Q が空ではない集合であることから, Q の元 c が存在する. したがって (1) より $0 = c - c \in Q$. よって任意の $a, b \in Q$ に対して, 再び (1) より $-b = 0 - b \in Q$. さらに, 再び (1) より $a + b = a - (-b) \in Q$.

  また, 少なくとも 2 つの数を含むことから $c \neq 0$ と考えてよい. このとき (2) から $1 = \frac{c}{c} \in Q$. よって任意の $a, b \in Q$ (ただし $b \neq 0$) に対して, 再び (2) より $\frac{1}{b} \in Q$. さらに再び (2) より $ab = \frac{a}{\frac{1}{b}} \in Q$. もちろん $b = 0$ のときは $ab = 0 \in Q$.]

  また, 有理数全体のなす集合 $\mathbb{Q}$ は体であり (この体を**有理数体**と呼ぶ), すべての体 Q は $\mathbb{Q}$ を含む (つまり, 有理数体 $\mathbb{Q}$ は最小の体である) ことが分かる.

  [∵ 上の証明で見たように, すべての体 Q は 1 と 0 を含み, 加減乗除について閉じていた. したがって, 任意の有理数 $\frac{m}{n}$ に対して, $m \geq 1$ のとき

  $$m = (m-1)+1 = ((m-2)+1)+1 = \cdots = ((\cdots(((1+1)+1)+1)\cdots)+1)+1 \in Q$$

  よって $-m = 0 - m \in Q$. また $0 \in Q$ であった. したがって m がどのような整数であっても $m \in Q$. 同様に $n \in Q$. よって (2) より $\frac{m}{n} \in Q$.]

- 体 Q に対し, 不定元 x を用いた $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ (ここで, $a_i \in Q$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$) の形のものを **Q 上の多項式**と呼び, もし $a_n \neq 0$ ならば $f(x)$ の**次数**は n であるとか, $f(x)$ は **n 次**の多項式であると呼ぶ.

  特に, $f(x) = a_0$ の形の多項式を**定数多項式**と呼ぶ. そして $f(x) = 0$ なる定数多項式 (つまり, $a_0 = 0$ の定数多項式) を**零多項式**と呼ぶ. 零多項式ではない定数多項式の次数は 0 であり, 零多項式の次数は「定義されない」とする場合と, 便宜的に $-\infty$ と定義する場合の 2 つの流儀がある.

- 体 Q 上の多項式は, 2 つの 1 次以上の多項式の積で表されるとき**可約**であると呼び, そうではない 1 次以上の多項式であるとき**既約**であると呼ぶ.

- c を数とする. もし体 Q 上の多項式 $f(x)$ が $f(c) = 0$ を満たすとき, c は $f(x)$ の**根**であると呼ぶ. (**注.** 方程式 $f(x) = 0$ を考えるときは, c をこの方程式の**解**と呼ぶ.)

- 数 c は, 零多項式ではない体 Q 上の多項式で c を根としてもつものが存在するとき, **Q 上代数的**であると呼ぶ. Q 上代数的でないとき, **Q 上超越的**であると呼ぶ. そして特に, 有理数体

$\mathbb{Q}$ 上代数的である数を**代数的数**, $\mathbb{Q}$ 上超越的である数を**超越数**と呼ぶ. カントールは 1874 年に, 実数全体の集合が非可算集合である一方で代数的数全体の集合が可算無限集合であることを示すことにより, ほとんどの実数は超越数であることを示した. しかし, どの実数が超越数であるかということは, 実はほとんど分かっていない. 初めて見つかった超越数は, 1840 年にリュウビルが見つけた

$$0.1100010\cdots010\cdots010\cdots$$

という, 小数点第 $n!$ 位 $(n=1,2,3,\dots)$ が 1, それ以外が 0 の数であり, 現在リュウビル数と呼ばれているものである. その他に, 円周率 π や自然対数 e は超越数であることが証明されている. (π に関しては 1873 年にエルミートによって, e については 1882 年にリンデマンによって示された. 証明は微積分や対称式の基本定理を用いてなされる.) しかし, $\pi+e$ が超越数であるのかどうかは分かっていない.

- 体 Q 上の既約多項式 $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ が $a_n=1$ を満たし, 数 c を根としてもつとき, $f(x)$ は c の Q 上の**最小多項式**であると呼ぶ.

(**注.** Q 上代数的な数 c は, その Q 上の最小多項式を必ず 1 つだけもつ. その証明の概要は次の通りである. c を根としてもつ Q 上の多項式全体の集合を $\mathbf{X}$ とするとき, 仮定「c は Q 上代数的」より $\mathbf{X}$ は空集合ではない. $\mathbf{X}$ の中で次数が最小な元全体のなす部分集合を $\mathbf{X}'$ とおくとき, これは c を根としてもつ Q 上の既約多項式全体の集合であることが証明できる. そしてこの中で最高次係数 a_n が 1 であるものはただ 1 つであり, これが c の Q 上の最小多項式である.)

- 2 つの体 Q_1, Q_2 が $Q_1 \subseteq Q_2$ の関係にあるとき Q_2 を Q_1 の**拡大体**, Q_1 を Q_2 の**部分体**と呼び

$$Q_2/Q_1 \quad \text{または} \quad \begin{array}{c} Q_2 \\ | \\ Q_1 \end{array}$$

で表す. このとき, Q_2 は乗法をスカラー倍とみることにより Q_1-ベクトル空間と考えることができる. このときの次元 $\dim_{Q_1} Q_2$ を拡大 Q_2/Q_1 の**拡大次数**と呼び $[Q_2:Q_1]$ で表す.

- 体 Q と数 c に対し, Q と c の両方を含む体の中で最小のもの ($\mathbf{X}$ を Q と c の両方を含む体全体の集合とするとき $\cap_{X\in\mathbf{X}} X$ がこのようなものである) を **Q に c を添加した体**と呼び $Q(c)$ で表す. そしてこのとき, $Q(c)/Q$ を**単純拡大**, $Q(c)$ を Q の**単純拡大体**と呼ぶ.

定理 1 (次数公式). 体 $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ が $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \cdots \subseteq Q_n$ で $[Q_n:Q_1]<\infty$ を満たしているとき

$$[Q_n:Q_1]=[Q_n:Q_{n-1}][Q_{n-1}:Q_{n-2}]\cdots[Q_2:Q_1]$$

が成り立つ.

(**証明**) 証明は容易である. 概要だけ与えよう. $n=3$ のときに証明できれば, 後は帰納的な議論により n が任意の自然数のときにも成り立つことが分かる. よって $n=3$ のときを考える.

仮定 $[Q_3:Q_1]<\infty$ から $[Q_3:Q_2]<\infty$ かつ $[Q_2:Q_1]<\infty$ であることが分かる. よって, $\{u_i\}_{i=1}^{m}$ は Q_2-ベクトル空間 Q_3 の基底, $\{v_j\}_{j=1}^{n}$ は Q_1-ベクトル空間 Q_2 の基底と表せるが, このとき $\{u_i v_j\}_{i=1,j=1}^{m\ \ n}$ は Q_1-ベクトル空間 Q_3 の基底であることが証明できる. つまり $[Q_3:Q_1]=[Q_3:Q_2][Q_2:Q_1]$ が証明された. □

定理 2. Q を体, c を体 Q 上代数的な数, $f(x)$ を c の体 Q 上の最小多項式 (既約多項式) とするとき, $[\,Q(c):Q\,]$ は $f(x)$ の次数に一致する.

(証明) $f(x)$ の次数を n とする. このとき, 仮定「$f(x)$ は既約多項式」より $n \geq 1$ であることを注意しておく. 実は $\{1, c, c^2, c^3, \ldots, c^{n-1}\}$ が Q-ベクトル空間 $Q(c)$ の基底であり, この定理の主張が真であることが分かる. 基底であることを示そう.

もし, $\{1, c, c^2, c^3, \ldots, c^{n-1}\}$ が Q 上 1 次独立ではないとすると, 少なくとも 1 つは 0 ではない $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_{n-1} \in Q$ で $q_0 + q_1 c + q_2 c^2 + \cdots + q_{n-1} c^{n-1} = 0$ を満たすものがとれるが, これは零多項式ではない c を根とする Q 上の $n-1$ 次多項式 $\sum_{i=0}^{n-1} q_i\, x^i$ の存在を意味しており, $f(x)$ が c の Q 上の最小多項式であることに矛盾する. したがって, $\{1, c, c^2, c^3, \ldots, c^{n-1}\}$ は Q 上 1 次独立である.

さらに, $Q(c) = \sum_{i=0}^{n-1} Qc^i$ であることも証明される. $Q(c) \supseteq \sum_{i=0}^{n-1} Qc^i$ は, $Q(c)$ が Q と c を含む体であることから明らかである. また, $\sum_{i=0}^{n-1} Qc^i$ は Q と c を含む体である.

[$\because$ 任意の $q \in Q$ に対して $q = q + 0c + 0c^2 + \cdots + 0c^{n-1}$ であることと, $c = 0 + 1c + 0c^2 + 0c^3 + \cdots + 0c^{n-1}$ から $\sum_{i=0}^{n-1} Qc^i$ は Q と c を含むことが分かる.

次に, 体であることを示す. 体の定義の (1) が満たされることは明らかである. (2) も成り立つことを示そう. 任意の $\sum_{i=0}^{n-1} q_i\, c^i,\ \sum_{i=0}^{n-1} q_i'\, c^i \in \sum_{i=0}^{n-1} Qc^i$ (ここで, $q_i, q_i' \in Q$) をとる. そして, $g(x) \overset{put}{:=} \sum_{i=0}^{n-1} q_i\, x^i,\ g'(x) \overset{put}{:=} \sum_{i=0}^{n-1} q_i'\, x^i$ とおく. $f(x)$ を $g'(x)$ でわり算して

[1] $f(x) = q_1(x)\, g'(x) + r_1(x)$ (ここで, $q_1(x)$ は商, $r_1(x)$ は余り)

もし $r_1(x)$ が定数多項式でなければ, 次に $g'(x)$ を $r_1(x)$ でわり算して

[2] $g'(x) = q_2(x)\, r_1(x) + r_2(x)$ (ここで, $q_2(x)$ は商, $r_2(x)$ は余り)

もし $r_2(x)$ が定数多項式でなければ, 次に $r_1(x)$ を $r_2(x)$ でわり算して

[3] $r_1(x) = q_3(x)\, r_2(x) + r_3(x)$ (ここで, $q_3(x)$ は商, $r_3(x)$ は余り)

$$\vdots$$

と計算していくと, 余り $r_1(x), r_2(x), r_3(x), \ldots$ の次数はどんどん小さくなっていくので, ある k 回目に $r_k(x)$ は零多項式ではない Q 上の定数多項式になる. (零多項式にはならないことは, もし零多項式であれば $g'(c) = 0$ が導かれ, $g'(x)$ の次数が n より小さかったことから, $f(x)$ が c の Q 上の最小多項式 (既約多項式) であったことに矛盾する.) このとき, 式 **[1]**, **[2]**, **[3]**, ..., **[k-1]** を $r_i(x) = \cdots$ の形に変形し, **[k-1]**, **[k-2]**, ..., **[1]** の順に **[k]** に代入していき, 最後に両辺を零でない定数 $r_k(x)$ で割ると $f(x)\, f'(x) + g'(x)\, g''(x) = 1$ (ここで $f'(x), g''(x)$ は Q 上の多項式, 1 は定数多項式 1) と整理できる. ただし, もし $g''(x)$ の次数が n より大きいときは $f(x)$ でわり算して再整理することにより $g''(x)$ の次数は $n-1$ 以下であるようにしておこう. このとき, この式に c を代入すると c は $f(x)$ の根であるので, $g'(c)\, g''(c) = 1$ となり $\frac{1}{g'(c)} = g''(c)$ が分かる. つまり, $\frac{1}{g'(c)}$ は $\sum_{i=0}^{n-1} q_i'' c^i$ (ここで, $q_i'' \in Q$) の形で表される. よって, $\frac{g(c)}{g'(c)} = \sum_{i=0}^{2n-2} \tilde{q}_i c^i$ (ここで, $\tilde{q}_i \in Q$) と表される. $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ (ここで, $a_i \in Q$, 特に $a_n = 1$) と表すとき, c が $f(x)$ の根であることから $c^n = \sum_{i=0}^{n-1} -a_i c^i$ が成り立つ. したがって, これを $\sum_{i=0}^{2n-2} \tilde{q}_i c^i$ に代入して整理していくと, $\sum_{i=0}^{n-1} a_i' c^i$ (ここで, $a_i' \in Q$) の形で表される, つまり, $\frac{g(c)}{g'(c)} \in \sum_{i=0}^{n-1} Qc^i$. 体の定義の (2) も満たされた.]

したがって, Q に c を添加した体 $Q(c)$ の定義から $Q(c) \subseteq \sum_{i=0}^{n-1} Qc^i$ も分かる.

$\therefore\ Q(c) = \sum_{i=0}^{n-1} Qc^i$ □

定理 3. 体の拡大 Q_2/Q_1 が $[\,Q_2 : Q_1\,] < \infty$ を満たすとき, Q_2 の任意の元は Q_1 上代数的である.

(証明) c を Q_2 の任意の元としよう. $n \overset{put}{:=} [\,Q_2 : Q_1\,]$ とおくと, $n{+}1$ 個の数 $1, c, c^2, c^3, \ldots, c^n$ は Q_1 上 1 次従属. つまり, 少なくとも 1 つは 0 ではない $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n \in Q_1$ が $q_0 + q_1\,c + q_2\,c^2 + \cdots + q_n\,c^n = 0$ を満たすようにとれる. このとき, $f(x) \overset{put}{:=} \sum_{i=0}^{n} q_i\,x^i$ とおくと, これは 零多項式ではない Q_1 上の多項式であり, かつ c を根とする. $\therefore$ c は Q_1 上代数的. □

II. 講義内容 1

授業 2 回分であることは既に述べたが, その準備として次のプリントを宿題として前の週に渡し, 次回の講義開始時に回収することを連絡した. また, 最初のページに載っている「プラトンのルール」を厳守して解答し, それ以外の手法を用いるなら, それをプラトンのルールから導き出してから使うように注意した.

§4.4 角の三等分問題

作図問題のルール　(「プラトンのルール」と呼ばれる)

使えるのは「定木」と「コンパス」のみを有限回 (目盛りが付いているものを「定規」, 目盛りが付いていないものを「定木」と表す). その使用時のルールは下記の通り.

- 定木でできることは, 異なる 2 点が与えられたとき, その 2 点を通る直線を引くことのみ. 長さは測れないものとする.
- コンパスでできることは, 異なる 2 点が与えられたとき, 片方の点を中心とし, 他方の点を通る円を描くこと.

「与えられた角に三等分線を引く問題」を考えてみよう. 三等分線は, 角の頂点以外の『もう 1 点』を作図し, その点と頂点を通る直線を定木で引くことで描くことができる. よって,「角の三等分線を引く問題」は「その『もう 1 点』をコンパスと定木で作図する問題」と言い換えられる. もっと詳しく述べると, ルールにしたがって直線や円を描くと, それらの交点ができる. つまり, 交点が作図できる. よって, この交点も使って, さらに定木とコンパスで新しい交点を作図し ··· という操作を繰り返し, 最終的にその『もう 1 点』を交点として作図する問題である.

まずは二等分線の復習.

問題 1. 与えられた任意の角度を二等分せよ. (二等分する半直線を作図せよ.)

次に三等分線を引いてみよう.

問題 2. 180°, 90°, 45° を三等分せよ.

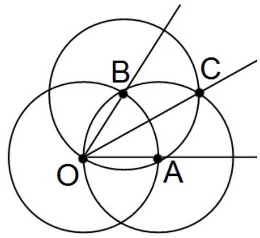
問題 3. 60° を三等分せよ.

もちろん, 問題 1, 2 は簡単に作図できる. 翌週に提出されたものを見たところ, 問題 1, 2 に関しては概ね作図できていた (プラトンのルールを厳密に適用しつつ, 作図の手順を分かりやすく説明できた者は少なかった). 問題 3 に関しては, 「ネットで検索した結果『作図不可能』」と解答したものが多かったが, 作図法を書き込んでいる者も数人いた.

以下のような解答例を, 次の講義の冒頭, 宿題の回収後にプロジェクターを使って説明した. (プラトンのルールの厳格な適用を身につけてもらうために, あえて行った.)

問題 1. 与えられた任意の角度を二等分せよ. (二等分する半直線を作図せよ.)

解答.

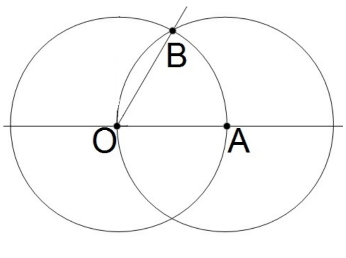


1. 角の頂点を O と表す.
2. 図のように, 角を作る半直線上の点 A を, 点 O と異なるように (適当) にとり, 点 O を中心とし点 A を通る円を描く.
3. 円と, 角を作る 2 つの半直線との交点で, 点 A とは異なるものを B とする. そして, 点 A を中心とし点 O を通る円と, 点 B を中心とし点 O を通る円を描く.
4. 2 つの円の交点で, 点 O とは異なるものを C とするとき, 点 C と点 O を通る直線を引く. これが二等分線である.

問題 2. 180°, 90°, 45° を三等分せよ.

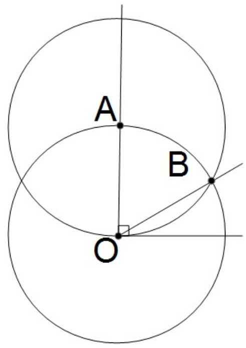
解答.

- 180° : 60° が作図できればよい.



1. 180° の頂点を O とし, 図のように, 180° をつくる半直線上の点 A を, 点 O と異なるように (適当に) とる.
2. 点 O を中心とし点 A を通る円と, 点 A を中心とし点 O を通る円を描く.
3. 2 つの円の交点の 1 つを B とする.
4. 点 O と点 B を通る直線を引く. これが 180° の三等分線である.

- 90° : 30° が作図できればよい.



1. 90° の頂点を O とし, 図のように, 90° をつくる半直線上の点 A を点 O と異なるように (適当に) とる.
2. 点 O を中心とし点 A を通る円と, 点 A を中心とし点 O を通る円を描く.
3. 図のように, 2 つの円の交点の 1 つを B とする.
4. 点 O と点 B を通る直線を引く. これが 90° の三等分線である.

- 45 度 : 15 度が作図できればよいが, これは 30 度を作図し, その二等分線を引けばよい.

問題 3. 60° を三等分せよ.

解答. 作図できない.

III. 講義内容 2

角の三等分に関する講義の 1 回目である. 資料と問題用紙を配付し, 各自で資料を見ながら問題用紙の 4 問を解答してもらった. その間, 本論文の著者 3 名は机間指導を行った. 問題用紙は講義終了 15 分前に回収し, 模範解答をプロジェクターを使って簡単に説明した. そしてその後, 新たな問題用紙を再配布し, そこに時間を掛けて再解答することを次週までの宿題とした.

配布資料は, 以下の通りである.

角の三等分問題

「与えられた任意の角度を三等分する半直線が, 定木とコンパスだけで作図できるか」という問題は**『角の三等分問題』**と呼ばれ, ギリシャの三大作図問題の 1 つとされている. ギリシャ時代から難問とされ, 1837 年 (何と 19 世紀) にやっとピエール・ローラン・ワンツェル (1814～1848; フランス) により否定的に解決された, つまり「**与えられた任意の角度を三等分する半直線は, 定木とコンパスだけで作図できるとは 限らない**」ことが証明された.

証明は反例を 1 つあげればよい. つまり, 三等分する半直線が作図できない角度を 1 つ見つければよい. 実は, **60 度は三等分線が作図できない**, つまり **20 度は作図できない.** これを証明しよう.

証明方法の概略. 角の三等分線は, 角の頂点とそれとは異なるある作図可能な点を結んで描かれる. したがってまず, 異なる 2 点が与えられたとき (**注.** 定木・コンパスを使うためには, まず 2 点がなければならない), この 2 点から定木とコンパスを有限回使って作図できる点全体の集合 $\mathbf{X}$ を考え, これがどのような点から成るのかを, 以下の (1)～(5) で明らかにする. (与えられた 2 点を元に, 平面上の各点を表現する座標も構成する.) そして, $\mathbf{X}$ に属する点の x 座標と y 座標に現れる数全体から成る集合 $\mathbf{D}$ (この集合の元は『作図可能数』と呼ばれる) を考え, (6) で「20 度が作図できること」と「$\cos 20° \in \mathbf{D}$」が同値であることを指摘し, 準備 (7) を経て, 最後の (8) で「$\cos 20° \notin \mathrm{D}$」を証明する.

(**注.** (7) で $\cos 20°$ を根にもつ既約多項式を考え, (8) の証明で, これまで学んできた拡大体の理論を使う.)

(1)

平面上に異なる 2 点 O, A が与えられたとする. この 2 点を基準にして, 平面上に x 軸と y 軸を作図し, さらにこれらに目盛り $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ を作図し, この目盛りを基準にして, 平面上のすべての点が (a, b) (ここで, a, b は実数) と表されるようにしよう.

- x 軸の定義: 2 点 O, A を通る直線を定木で引き, これを x 軸と呼ぼう.
- x 軸上の目盛りの定義:
  - 点 O に 0, 点 A に 1 と目盛りを付けよう.
  - さらに, 目盛り 1 の点 (点 A) を中心とし目盛り 0 の点 (点 O) を通る円を描くと, 目盛り 0 の点とは異なる x 軸との交点が作図できる. この点に 2 と目盛りを付けよう.
  - 次に, 目盛り 2 の点を中心とし目盛り 1 の点を通る円を描くと, 目盛り 1 の点とは異なる x 軸との交点が作図できる. この点に 3 と目盛りを付けよう.
  - 同様にして, 目盛り n (ここで, n は任意の自然数) を付ける点が作図できる.

- また, 目盛り 0 の点を中心とし目盛り 1 の点を通る円を描くと, 目盛り 1 の点とは異なる x 軸との交点が作図できる. この点に -1 と目盛りを付けよう.
- さらに, 目盛り -1 の点を中心とし目盛り 0 の点を通る円を描くと, 目盛り 0 の点とは異なる x 軸との交点が作図できる. この点に -2 と目盛りを付けよう.
- 同様にして, 目盛り $-n$ (ここで, n は任意の自然数) を付ける点が作図できる.

- y 軸の定義: x 軸の目盛り 1 の点を中心とし目盛り -1 の点を通る円と, 目盛り -1 の点を中心とし目盛り 1 の点を通る円を描くと, 2 つの円の 2 交点が得られる. 定木でこの 2 交点を通る直線を引くと, これは 点 O を通り x 軸に垂直な直線である. これを $\underline{y \text{ 軸}}$ と呼ぼう.

- y 軸上の目盛りの定義: 点 O を中心とし点 A を通る円と y 軸との 2 交点の一方に目盛り 1 を付け, もう一方に目盛り -1 を付けよう. 後は, x 軸に目盛りを付けていったのと同様にして, y 軸上に目盛り $2, 3, 4, \cdots, -2, -3, -4, \cdots$ を付ける点が作図できる.

記号の定義.

- 2 点 O, A から定木とコンパスだけを有限回使って作図される座標平面上の点全体の集合を $\mathbf{X}$ と表し,
- $\mathbf{X}$ に属する点の x 座標や y 座標に現れる数全体のなす集合を $\mathbf{D}$ と表すことにする.

($\mathbf{D}$ に属する数は**作図可能数**と呼ばれる.)

(2)

(I) 任意の整数 n に対して $(n, 0), (0, n) \in \mathbf{X}$

(II) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbf{D}$

(証明) (I) (1) の x 軸, y 軸とそれらの目盛りの決め方から明らか.

(II) (I) と $\mathbf{D}$ の定義より明らか.

□

(3)

さらに, 次が成り立つことを注意しておく.

(I) (*i*) $(a, b) \in \mathbf{X} \implies (b, a), (a, -b), (-a, b) \in \mathbf{X}$

(*ii*) つまり, 作図可能な点の範囲は, 直線 $y = x$ や x 軸, y 軸に対して線対称.

(*iii*) よって特に, $d \in \mathbf{D} \Rightarrow -d \in \mathbf{D}$

(II) (*i*) $(a, b) \in \mathbf{X} \implies (a-1, b), (a+1, b) \in \mathbf{X}$

(*ii*) よって, $(a, b) \in \mathbf{X} \implies (a, b)$ を通る x 軸の垂線が引ける.

(*iii*) 同様に考えると, $(a, b) \in \mathbf{X} \implies (a, b)$ を通る y 軸の垂線も引ける.

(III) (*i*) $d \in \mathbf{D} \implies (d, 0), (-d, 0), (0, d), (0, -d) \in \mathbf{X}$

(*ii*) さらに, $(a, b) \in \mathbf{X}$, $d \in \mathbf{D} \implies (a+d, b), (a-d, b), (a, b+d), (a, b-d) \in \mathbf{X}$

(iii) よって，$(a,b) \in \mathbf{X}$,　$0 < d \in \mathbf{D}$
$\Longrightarrow$　(a,b) を中心とする半径 d の円が描ける．

(IV)　$a,b \in \mathbf{D} \quad \Longleftrightarrow \quad (a,b) \in \mathbf{X}$

(証明) $\mathbf{X}$ に属する点は, 2 点 O$(0,0)$, A$(1,0)$ から定木とコンパスを有限回使って作図される点であった．よって，$(a,b) \in \mathbf{X}$ であれば, 2 点 O$(0,0)$, A$(1,0)$ から (a,b) $(\in \mathbf{X})$ を作図する方法が存在する．その方法を $\mathbf{W}_{(a,b)}$ で表そう．

(I)　(i)　$(0,1)$, $(-1,0) \in \mathbf{X}$ [$\because$ (2)(I)]．よって，

- $\mathbf{W}_{(a,b)}$ を 2 点 $(0,0)$, $(0,1)$ から, 直線 $y = x$ に対して線対称に行うと，点 (b,a) が作図される．
- $\mathbf{W}_{(a,b)}$ を 2 点 $(0,0)$, $(1,0)$ から x 軸対称に行うと，点 $(a,-b)$ が作図される．
- $\mathbf{W}_{(a,b)}$ を 2 点 $(0,0)$, $(-1,0)$ から y 軸対称に行うと，点 $(-a,b)$ が作図される．

(ii), (iii)　(i) から明らか．

(II)　(i)　$(2,0) \in \mathbf{X}$ [$\because$ (2)(I)]．よって，

- $\mathbf{W}_{(a,b)}$ を 2 点 $(1,0)$, $(2,0)$ から行うと，点 $(a+1,\, b)$ が作図される．
- $\mathbf{W}_{(a,b)}$ を 2 点 $(-1,0)$, $(0,0)$ から行うと，点 $(a-1,\, b)$ が作図される．

(ii)　$(a-1,\, b)$, $(a+1,\, b) \in \mathbf{X}$ [$\because$ (i)]．よって, 点 $(a-1,\, b)$ を中心とし点 $(a+1,\, b)$ を通る円と, 点 $(a+1,\, b)$ を中心とし点 $(a-1,\, b)$ を通る円を描き, その 2 交点を通る直線を引くと, それは点 (a,b) を通る x 軸の垂線である．

(iii)　明らか．

(III)　$(i), (ii)$　d に対して，$d' \in \mathbf{D}$ で $(d,d') \in \mathbf{X}$ を満たすものが存在する [$\because$ $d \in \mathbf{D}$ なので，$d' \in \mathbf{D}$ で $(d,d') \in \mathbf{X}$ または $(d',d) \in \mathbf{X}$ を満たすものが存在する．もし $(d',d) \in \mathbf{X}$ のときは，(I)(i) を用いる]．よって，点 (d,d') を通る x 軸の垂線が引ける [$\because$ (II)(ii)]．そして, この垂線と x 軸の交点は $(d,0)$ である，つまり $(d,0) \in \mathbf{X}$. したがって，$(d+1,0) \in \mathbf{X}$ [$\because$ (II)(i)]. ゆえに，点 $(d,0)$ と $(d+1,0)$ から方法 $\mathbf{W}_{(a,b)}$ を行うと, 点 $(a+d,\, b)$ が作図される．

また, これを直線 $y = x$ に対して線対称に行うと，$(0,d)$, $(a,b+d) \in \mathbf{X}$ も示される．

さらに，(I)(iii) より $(-d,0)$, $(0,-d)$, $(a-d,\, b)$, $(a,\, b-d) \in \mathbf{X}$ も分かる．

(iii)　$(a+d,b) \in \mathbf{X}$ [$\because$ (III)(ii)]．よって, 点 (a,b) を中心とし点 $(a+d,b)$ を通る円をコンパスで描けばよい．

(IV)　$(\Rightarrow)$　$(a,0) \in \mathbf{X}$ [$\because$ $a \in \mathbf{D}$ と (III)(i)]．よって，$(a,b) \in \mathbf{X}$ [$\because$ $b \in \mathbf{D}$ と (III)(ii)]．

$(\Leftarrow)$　$\mathbf{D}$ の定義から明らか．

□

(4)

(I) $\mathbf{D}$ は体である．つまり，$\mathbf{D}$ は加減乗除について閉じている．

(よって，$\mathbb{Q} \subseteq \mathbf{D}$ [$\because$ $\mathbb{Q}$ は最小の体])

(II) $a \in \mathbf{D}$ に対し，$a \geq 0$ ならば $\sqrt{a} \in \mathbf{D}$

(このことを，$\mathbf{D}$ は<u>べき根について閉じている</u>と呼ぶ.)

注. ピタゴラスの定理を用いると，この (I), (II) と (3)(III)(iii) から，コンパスで円を描くときによく用いられている方法「すでに作図された 2 点の長さをコンパスでとり，そのままコンパスの針をあるすでに作図された点に移動させ，その点を中心とする円を描くこと」を行って構わないことが分かる．(→ 問題 4)

(証明)

(I) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbf{D}$ [$\because$ (2)(II)]．よってもちろん，$\mathbf{D}$ は 2 つの実数を含む．よってあと，体の定義の (1), (2) が成り立つことを示す．

(1) 任意の $a, b \in \mathbf{D}$ に対し，$a - b \in \mathbf{D}$ [$\because$ (3)(III)(i), (ii) から分かる．]．

(2) 任意の $a, b \in \mathbf{D}$ (ただし，$b \neq 0$) に対し，$\dfrac{a}{b} \in \mathbf{D}$ (→ 問題 5)

(II) 容易．(→ 問題 6)

□

(5)

$\mathbf{D}$: $\mathbb{Z}$ から加減乗除とべき根をとる操作を有限回行って得られる数全体の集合．

(証明) $\mathbf{D}'$: $\mathbb{Z}$ から加減乗除とべき根をとる操作を有限回行って得られる数全体の集合，とおく．このとき，$\mathbf{D} = \mathbf{D}'$ が示されればよい．これを示そう．

($\supseteq$) (2)(II) と (4) から分かる．

($\subseteq$) まず，次のような高校生レベルの 2 つの主張が成り立つことを指摘しておく．

(主張 1) 2 点 (a, b), (c, d) から作図される直線や円の方程式の係数は，a, b, c, d から有限回加減乗除して得られる．

(主張 2) 2 点 (a, b), (c, d) から作図される直線や円と，2 点 (a', b'), (c', d') から作図される直線や円との交点の x 座標と y 座標は，

$$\Omega \overset{put}{\coloneqq} \{a, b, c, d, a', b', c', d'\}$$

とおくとき，Ω の元から有限回加減乗除して得られるか，または Ω の元から有限回加減乗除して得られるある正の数のべき根を Ω に加えて，さらに加減乗除を有限回行うことにより得られる．

(主張の証明)

(主張 1)

- 2 点 (a,b), (c,d) を通る直線は
$$\left\{\begin{array}{ll} y-b=\dfrac{b-d}{a-c}(x-a) & (\,a\neq c\text{ のとき}\,) \\ x=a & (\,a=c\text{ のとき}\,)\end{array}\right\},\ \text{つまり } (b-d)x+(c-a)y+ad-bc=0$$

- 点 (a,b) を中心とし点 (c,d) を通る円は $(x-a)^2+(y-b)^2=(a-c)^2+(b-d)^2$

(主張 2)

- 直線と直線の交点の座標は, 2 直線の係数の加減乗除で得られる.

  [$\because$ 普通に 2 直線の連立方程式を解くときのことを思い浮かべれば明らか.]

- 直線と円の交点の座標は, 2 次方程式の解の公式を用いて, 係数の加減乗除とべき根をとることで得られる.

  [$\because$ 直線の方程式と円の方程式の連立方程式は 2 次方程式を生み出すので.]

- 2 つの円の交点の座標も, 係数の加減乗除とべき根をとることで得られる.

  (ヒント. 2 つの円の方程式の引き算をして 2 交点を通る直線の方程式を求め,
  それと円との交点を計算すればよい.)

(主張は証明された.)

では (5) の証明を続けよう.

任意の $d\in\mathbf{D}$ に対し $(d,0)\in\mathbf{X}$ [$\because$ (3)(III)(i)]. そして, $\mathbf{X}$ の定義より, $(d,0)$ は 2 点 O, A から定木とコンパスを使ってある点 A_2 を作図し, 3 点 O, A, A_2 から定木とコンパスを使ってある点 A_3 を作図し, 4 点 O, A, A_2, A_3 から定木とコンパスを使ってある点 A_4 を作図し, $\cdots\cdots$ という操作を有限回繰り返して作図される.

そのおのおのの操作について考察してみると, 主張 2 より, 点 A_2 を (a_2,a_2') と表すとき, a_2 と a_2' は $0, 1$ から加減乗除を有限回行って得られるある正の数 b_1 のべき根 $\sqrt{b_1}$ をとり, $0, 1, \sqrt{b_1}$ から加減乗除を有限回行って得られる. 次に, 点 A_3 を (a_3,a_3') と表すとき, a_3 と a_3' は $0, 1, a_2, a_2'$ から加減乗除を有限回行って得られるか, または $0, 1, a_2, a_2'$ から加減乗除を有限回行って得られるある正の数 b_2 のべき根 $\sqrt{b_2}$ をとり, $0, 1, a_2, a_2', \sqrt{b_2}$ から加減乗除を有限回行って得られる. さらに, 点 A_4 を (a_4,a_4') と表すとき, a_4 と a_4' は $0, 1, a_2, a_2', a_3, a_3'$ から $\cdots\cdots$ という議論を繰り返すと, 点 $(d,0)$ の x 座標 d は, $\mathbb{Z}$ から加減乗除とべき根をとる操作を有限回行って得られる数の集合 $\mathbf{D}'$ に属することが分かる. $\therefore\ \mathbf{D}\subseteq\mathbf{D}'$

$\square$

以上で, 2 点 $\mathrm{O}\,(0,0)$, $\mathrm{A}\,(1,0)$ が与えられたとき, これらから定木とコンパスを有限回使って作図できる点全体の集合 $\mathbf{X}$ は「$\mathbb{Z}$ から加減乗除とべき根をとる操作を有限回行って得られる数を座標にもつ点全体の集合」であることが分かる [$\because$ (3)(IV)].

そして, 問題用紙の 4 問は次の通りである. 解答は, あくまでプラトンのルールと, そこから導き出した性質のみを使用し, それ以外の手法を用いるなら, それをプラトンのルールから導き出してから使うように注意した.

問題 4. 「定木」と「コンパス」を「プラトンのルール」に従って用いるとき, 任意の点 $\mathrm{P}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathbf{X}$ に対して, 点 P を中心とし半径が点 B, C の距離 BC である円が描けること, つまり, 点 B, C の距離 BC をコンパスでとり, そのままコンパスの針を点 P に移動させ, 点 P を中心とする円を描くことが「プラトンのルール」に反しないことを証明せよ.
(B (b_1, b_2), C (c_1, c_2) と表そう.)

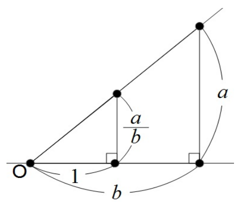
問題 5. (4)(I) の証明の (2) を証明せよ.

問題 6. (4)(II) を証明せよ.

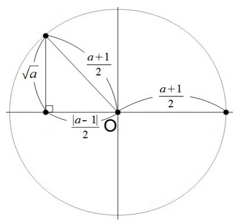
問題 7. 2 点 O $(0,0)$, A $(0,1)$ が与えられたとき, これらから定木とコンパスを有限回使って作図できる点全体の集合 $\mathbf{X}$ は「$\mathbb{Z}$ から加減乗除とべき根をとる操作を有限回行って得られる数を座標にもつ点全体の集合」であった. その証明を要約せよ.

ヒント.

問題 5. $a = 0$ のときと,
$a, b > 0$ のときを考えればよい.
[$\because$ (3)(I)(iii)]
$a, b > 0$ のときは,
例えば $1 < b$ なら,



問題 6.



プリント回収後にプロジェクターを使って, 下記のような解答例を説明した.

問題 4 の解答.

$b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbf{D}$ [$\because$ B (b_1, b_2), C $(c_1, c_2) \in \mathbf{X}$].

よって,

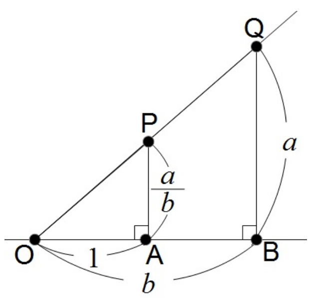
$$\mathrm{BC} = \sqrt{(b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2} \in \mathbf{D} \qquad [\because (4)]$$

$\therefore$ 点 P を中心とし半径 BC の円が描ける [$\because$ $\mathrm{P} \in \mathbf{X}$ と (3)(III)(iii) より].

問題 5 の解答.

点 O $(0,0) \in \mathbf{X}$ であるので $0 \in \mathbf{D}$. よって $a = 0$ のときは $\frac{a}{b} = 0 \in \mathbf{D}$. したがってあと $a, b > 0$ の場合を示せば十分 [$\because$ (3)(I)(iii)].

$a, b > 0$ とする. 点 A $(1, 0)$ とし, 点 B $(b, 0)$, P $\left(1, \frac{a}{b}\right)$, Q (b, a) を考える. 点 B, Q は作図できる [$\because$ $0, a, b \in \mathbf{D}$ と (3)(IV) より, $(b,0), (b,a) \in \mathbf{X}$]. 2 点 O, Q を通る直線を引き, さらに点 A を通る x 軸の垂線を引く [$\because$ (3)(II)(ii) より引ける]. その交点が P であるので, P は作図できたことになる. $\therefore$ $\mathrm{P} \in \mathbf{X}$. $\therefore$ $\frac{a}{b} \in \mathbf{D}$.

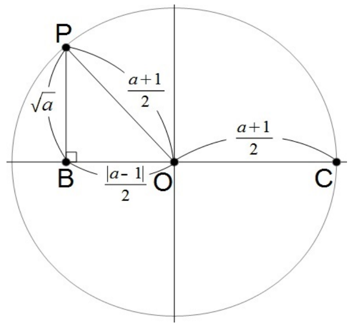


問題 6 の解答.

$a=0$ のときは, $\sqrt{a}=0\in\mathbf{D}$.

$a=1$ のときは, $\sqrt{a}=1\in\mathbf{D}$.

$a\neq 0,1$ のとき, 点 B $\left(-\frac{|a-1|}{2},\ 0\right)$, 点 C $\left(\frac{a+1}{2},\ 0\right)$ を考えると, これらは作図できる, つまり, $\mathrm{B},\mathrm{C}\in\mathbf{X}$ [$\because$ 仮定 $a\in\mathbf{D}$ と (2)(II), (4)(I) より $\frac{a+1}{2}$, $\frac{|a-1|}{2}\in\mathbf{D}$. よって, (3)(III)($i$) より]. 点 B を通る x 軸の垂線を引き, 点 O を中心とし点 C を通る円を描く. それらの交点で図のようなものを P とおくとき, その座標は $\left(-\frac{|a-1|}{2},\ \sqrt{a}\right)$.
$\therefore\ \sqrt{a}\in\mathbf{D}$ [$\because$ $\mathrm{P}\in\mathbf{X}$].



問題 7 の解答. 省略.

IV. 講義内容 3

角の三等分に関する講義の 2 回目である. 前回同様, 資料と問題用紙を配付し, 資料を見ながら問題用紙の 2 問を解答してもらった.

配布資料は, 以下の通りである.

(6)

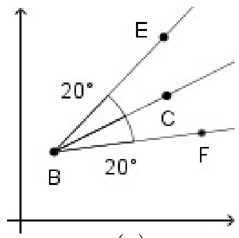
与えられた 2 点から (1) の要領で目盛りが付けられた x 軸, y 軸を作図し, (1) の直後の「記号の定義」の要領で集合 $\mathbf{X}$, $\mathbf{D}$ を定義したとき, 次は同値である. （→ 問題 8）

(a) 20° は作図できる, つまり, $\angle\mathrm{PQR}=20^\circ$ である 3 点 $\mathrm{P},\mathrm{Q},\mathrm{R}\in\mathbf{X}$ が存在する.

(b) $\cos 20^\circ\in\mathbf{D}$

(c) 任意の 2 点 $\mathrm{B},\mathrm{C}\in\mathbf{X}$ に対し, 2 点 $\mathrm{E},\mathrm{F}\in\mathbf{X}$ で
$$\angle\mathrm{EBC}=\angle\mathrm{FBC}=20^\circ\quad かつ\quad \angle\mathrm{EBF}=40^\circ$$
を満たすものが存在する.

(ゆえに,「**20 度が作図できないことを証明したいのであれば,** $\cos 20^\circ\notin\mathbf{D}$ **を示せばよい**」ことになる.)



(c)

付記. 20° に関する (6) の同値性は, 実は任意の α°（$0<\alpha<180$）に関して成り立つことが, その証明から分かる.

(7)

$$8x^3-6x-1$$

は, $\cos 20^\circ$ を根にもつ有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の既約多項式である.
(よって, $\cos 20^\circ$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式は $x^3-\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}$)

(証明)

- $\cos 20^\circ$ が $8x^3-6x-1$ の根であること:

  3 倍角の公式: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ より $4\cos^3 20^\circ = \cos 60^\circ + 3\cos 20^\circ$ であるので,

$$
\begin{aligned}
8\cos^3 20^\circ - 6\cos 20^\circ - 1 &= 2\,(\cos 60^\circ + 3\cos 20^\circ\,) - 6\cos 20^\circ - 1 \\
&= 2\left(\frac{1}{2} + 3\cos 20^\circ\right) - 6\cos 20^\circ - 1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

- $\mathbb{Q}$ 上の既約多項式であること :

  $8x^3-6x-1$ は有理数を根にもたないことが示されれば十分.

  [$\because$ $8x^3-6x-1$ は 3 次式であるから, もし $8x^3-6x-1 = f(x)\,g(x)$ (ここで $f(x), g(x)$: 1 次以上の $\mathbb{Q}$ 上の多項式) と表されたとき, $f(x), g(x)$ のいずれかは 1 次式であり, $\mathbb{Q}$ 上の 1 次式は有理数を根にもつので.]

  背理法で証明する.

  $8x^3-6x-1$ が有理数根 $\dfrac{a}{b}$ (: 既約分数とする) をもったと仮定する. このとき,

$$8a^3 = (\,6a+b\,)\,b^2$$

  ゆえに, $|\,a\,| \geq 2$ [$\because$ $|\,a\,| = 1$ のとき この等式を満たす整数 b は存在しない].
  今, p を $|\,a\,|$ の素因数とするとき, p は $6a+b$ を割り切る [$\because$ 仮定, $\dfrac{a}{b}$ は既約分数より]. したがって, p は b を割り切る [$\because$ $p : |\,a\,|$ の素因数]. これは $\dfrac{a}{b}$ が既約分数であったことに矛盾する.

  $\therefore$ $8x^3-6x-1$ は有理数を根にもたない.

□

(8)

$\cos 20^\circ \notin \mathbf{D}$. つまり, 20° は作図できない [$\because$ (6)].

(証明) $\cos 20^\circ \in \mathbf{D}$ と仮定すると,

$$
\left\{
\begin{array}{l}
0 < \exists a_1 \in Q_1 \overset{put}{:=} \mathbb{Q} \\
0 < \exists a_2 \in Q_2 \overset{put}{:=} Q_1(\sqrt{a_1}\,) \\
0 < \exists a_3 \in Q_3 \overset{put}{:=} Q_2(\sqrt{a_2}\,) \\
0 < \exists a_4 \in Q_4 \overset{put}{:=} Q_3(\sqrt{a_3}\,) \\
\qquad\qquad \vdots \\
0 < \exists a_n \in Q_n \overset{put}{:=} Q_{n-1}(\sqrt{a_{n-1}}\,)
\end{array}
\right\}
\quad \text{s.t.} \quad \cos 20^\circ \in Q_{n+1} \overset{put}{:=} Q_n(\sqrt{a_n}\,)
\quad
\left(
\begin{array}{l}
\text{つまり,} \\
Q_{n+1} \ni \cos 20^\circ \\
| \\
Q_n \\
| \\
Q_{n-1} \\
| \\
\vdots \\
| \\
Q_1 = \mathbb{Q}
\end{array}
\right)
$$

$\because$ (5) から，$\mathbf{D}$ とは「$\mathbb{Z}$ から加減乗除とべき根をとる操作を有限回行って得られる数全体の集合」であった．したがって，$\cos 20^\circ$ は

- まず $\mathbb{Z}$ から加減乗除を有限回行って得られたある正の数 a_1（もちろん $a_1 \in Q_1 \overset{put}{:=} \mathbb{Q}$）のべき根 $\sqrt{a_1}$ をとり，
- さらに $Q_1 \cup \{\sqrt{a_1}\}$ から加減乗除を有限回行って得られたある正の数 a_2 (加減乗除した数はすべて，体 $Q_2 \overset{put}{:=} Q_1(\sqrt{a_1})$ に含まれている) のべき根 $\sqrt{a_2}$ をとり，
- さらに，$Q_2 \cup \{\sqrt{a_2}\}$ から加減乗除を有限回行って得られたある正の数 a_3 (加減乗除した数はすべて，体 $Q_3 \overset{put}{:=} Q_2(\sqrt{a_2})$ に含まれている) のべき根 $\sqrt{a_3}$ をとり，

$$\vdots$$

- を有限回繰り返して得られた体 $Q_n(\sqrt{a_n})$ に含まれているはずである．

このとき，

$$\exists m\ (\leq n)\ \text{ s.t. }\ [\,Q_{n+1} : Q_1\,] = 2^m,\ \ \text{つまり},\ [\,Q_{n+1} : \mathbb{Q}\,] = 2^m$$

$\because$ 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，$[\,Q_{i+1} : Q_i\,] = 1$ または 2

$\because$ $\sqrt{a_i} \in Q_i$ のとき $Q_{i+1} = Q_i$，つまり，$[\,Q_{i+1} : Q_i\,] = 1$.
$\sqrt{a_i} \notin Q_i$ のとき，$\sqrt{a_i}$ の Q_i 上の最小多項式は $x^2 - a_i$.
$\therefore$ $[\,Q_{i+1} : Q_i\,] = 2$ [$\because$ 定理 2]

よって, 定理 1 を用いると

$$\exists m \leq n \quad \text{s.t.} \quad [\,Q_{n+1} : Q_1\,] = [\,Q_{n+1} : Q_n\,]\,[\,Q_n : Q_{n-1}\,] \cdots [\,Q_2 : Q_1\,] = 2^m$$

したがって，

$$\exists k \leq m \quad \text{s.t.} \quad [\,\mathbb{Q}(\cos 20^\circ) : \mathbb{Q}\,] = 2^k$$

$\because$ $\cos 20^\circ \in Q_{n+1}$ より, 拡大列

$$\begin{array}{c} Q_{n+1} \\ | \\ \mathbb{Q}(\cos 20^\circ) \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

が考えられる．よって，

$$\begin{aligned} 2^m &= [\,Q_{n+1} : \mathbb{Q}\,] \\ &= [\,Q_{n+1} : \mathbb{Q}(\cos 20^\circ)\,]\,[\,\mathbb{Q}(\cos 20^\circ) : \mathbb{Q}\,] \qquad [\because\ \text{定理 } 1\,] \end{aligned}$$

$\therefore$ $[\,\mathbb{Q}(\cos 20^\circ) : \mathbb{Q}\,]$ は 2^m の約数.

しかし，$[\,\mathbb{Q}(\cos 20^\circ) : \mathbb{Q}\,] = 3$ [$\because$ (7) と定理 2 より]
矛盾.
$\therefore$ $\cos 20^\circ \notin \mathbf{D}$ $\square$

付記.

1. 60° に注目し, 角の三等分線の作図が一般的には不可能であることを証明した.

では, どのような角度の三等分線が定木とコンパスで作図可能で, どのような角度の三等分線が作図不可能なのであろうか. 実は, **自然数の角度に関しては, 9 の倍数の角度は三等分線が作図可能で, それ以外の角度は不可能であること**が, 既に証明した 20° は作図不可能という事実から導き出される. (→ 問題 9)

2. 角の二等分線は常に作図可能で, 三等分線の作図は一般的には不可能であった. ならば, 四等分線は?という疑問が出てくるが, 二等分線を 2 回引くことにより容易に作図可能であることが分かる. また六等分線は, もし引けたなら六等分線のなす角度を隣合わせに 2 回描く ((6) 直後の付記より可能) ことにより, 三等分線も引けることになるので, 引けるとは限らないことがすぐに分かる. では五等分線, 七等分線, $\cdots$ はどうであろうか? 実は, これらの問題も解決しており, 必ず作図できるのは角の 2^n 等分線 (ここで, n は任意の自然数) だけであることが, 円分多項式を使って証明できる. (後期の講義「代数学 II」で紹介する.)

問題用紙は次の通りである.

問題 8. (6) を証明せよ.

問題 9. 「自然数の角度に関しては, 9 の倍数の角度は三等分線が作図可能で, それ以外の角度は不可能である」(付記. 1) ことを, 既に証明した 20° は作図不可能という事実を用い, 次の (1),(2),(3) を示すことにより証明しよう.

(1) 3 の倍数の角度は作図可能, つまり, 9 の倍数の角度は三等分線が作図可能であることを証明せよ.

(**ヒント.** 「正五角形」「正六角形」「角の二等分線」が作図可能であることを用いると, 3° が作図可能であることが分かる. (ちなみに, 正 n 角形の内角は $\frac{180^\circ\times(n-2)}{n}$ であった.) また, (6) の直後の付記より, α° ($0<\alpha<180$) が作図可能と仮定すると, 任意の作図された 2 点 B, C に対し, $\angle\mathrm{BCP}=20^\circ$ となる点 P が, 直線 BC のどちら側にも作図できることが分かる.)

(2) 3 の倍数でない任意の自然数の角度は作図不可能, つまり, 3 の倍数であるが 9 の倍数ではない自然数の角度は三等分線が作図不可能であることを証明せよ.

(3) 3 の倍数ではない任意の自然数 n に対して, $\frac{n}{3}^\circ$ は作図不可能, つまり, 3 の倍数でない自然数の角度は三等分線が作図不可能であることを証明せよ.

プリント回収後にプロジェクターを使って, 下記のような解答例を説明した.

問題 8 の解答.

$(a)\Rightarrow(c)$ 点 B を中心とし半径 PQ の円を描き [$\because$ 問題 4 より描ける], 半直線 BC との交点を C$'$ とおく. さらに, 点 B を中心とし半径 QR の円と, 点 C$'$ を中心とし半径 PR の円を描き, それらの 2 交点を E, F とすると, $\angle\mathrm{EBC}=\angle\mathrm{FBC}=20^\circ$.
(次ページ図 1,2 参照.)

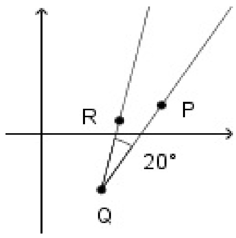


図 1

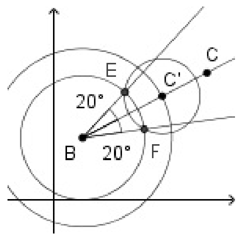


図 2

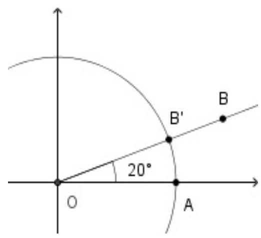


図 3

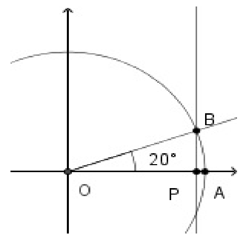


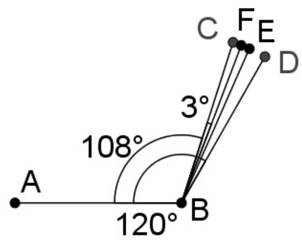
図 4

$(c) \Rightarrow (b)$　点 O (0,0) と点 A (1,0) に対して仮定 (c) を適用すると, 図 3 のように, $\angle \mathrm{AOB} = 20°$ となる点 $\mathrm{B} \in \mathbf{X}$ が存在する. 点 O を中心とし点 A を通る円を描き, 図 3 のように, 半直線 OB との交点を B′ とするとき, B′ は $(\cos 20°, \sin 20°)$ と表される.
$\therefore\ \cos 20° \in \mathbf{D}$ [$\because$ $\mathrm{B}' \in \mathbf{X}$].

$(b) \Rightarrow (a)$　$\mathrm{P} \overset{put}{:=} (\cos 20°, 0) \in \mathbf{X}$ [$\because$ 仮定 (b) と (3)(III)(i) より]. よって点 P を通る x 軸の垂線を引き [$\because$ (3)(II)(ii) より引ける], 点 O を中心とし点 A を通る円を描き, それらの交点の 1 つを B とおくとき, $\angle \mathrm{AOB} = 20°$.
(図 4 参照.)

問題 9 の解答.

(1) 辺 AB を共有する正五角形, 正六角形を同じ側に描き, 辺 AB の隣の辺をそれぞれ BC, BD とする. このとき, $\angle \mathrm{CBD} = 120° - 108° = 12°$ [$\because$ 正五角形と正六角形の内角はそれぞれ 108°, 120°]. よって, この角の二等分線 BE を引くと $\angle \mathrm{CBE} = 6°$. さらに, $\angle \mathrm{CBE}$ の二等分線 BF を引くと $\angle \mathrm{CBF} = 3°$. よって, 3° は作図される. したがって, 3° を何度も作図することにより 3 の倍数の角度は作図可能 [$\because$ (6) の直後の付記より, 3° の角度を並べて作図することは可能].



(2) 1° は作図不可能 [$\because$ もし可能であるとすると, 1° の作図を繰り返すことにより 20° も作図されてしまう [$\because$ (6) の直後の付記] ので]. 同様の理由で 2° も作図不可能である. この 2 つの事実を使って, 3 の倍数でない任意の角度は作図不可能であることを示そう.

n を 3 の倍数ではない自然数とし, $n°$ は作図可能であると仮定する. n を 3 で割って

$$n = 3q + r \quad (\text{ここで},\ q:\text{商},\ r:\text{余り})$$

と表すとき $r = 1$ または 2 [$\because$ $n : 3$ の倍数でない自然数].

- $r = 1$ のとき, (1) で示したように 3 の倍数の角度 $3q°$ は作図可能であり, 今 $n°$ は作図可能と仮定しているので, **差の角度** 1° も作図できることになる. これは, 1° は作図不可能であるという事実に矛盾する.
- $r = 2$ のときも, 同様に考えると, **差の角度** 2° が作図できることになる. これは, 2° は作図不可能であるという事実に矛盾する.

$\therefore\ n°$ は作図不可能.

(3) n を 3 の倍数ではない自然数とし, $\frac{n}{3}°$ は作図可能であると仮定する. このとき $n°$ も作図可能 [$\because$ $\frac{n}{3}°$ を 3 回作図して $n°$ が作図されるので]. これは既に証明した (2) に矛盾する. よって, n が 3 の倍数ではない自然数であれば $\frac{n}{3}°$ は作図不可能.

V. レポート課題

後日の前期最終試験のおり, 次のようなレポート提出を最終課題とした.

ギリシャ三大作図問題の他の 2 問は, 次のようなものである.

- **立方体倍積問題.** 与えられた立方体の体積の 2 倍の体積をもつ立方体 (の 1 辺) を作図せよ.
- **円積問題.** 与えられた円と同じ面積の正方形を作図せよ.

立方体倍積問題は, 角の三等分問題の解法で示した (6), (7), (8) を, ある (6′), (7′), (8′) に書き換えることにより解法が得られる. 円積問題は, 円周率 π が超越数であることを使い, (6), (8) を, ある (6″), (8″) に書き換え, (7) を削除することにより解法が得られる. (6′), (7′), (8′) と (6″), (8″) を記述し, 証明して, 立方体倍積問題と円積問題を解決せよ.

ヒントとして, (6′), (6″) の主張を与えておく.

(6′)

与えられた立方体の 1 辺の長さだけ離れた 2 点 O, A から, (1) の要領で目盛りが付けられた x 軸, y 軸を作図し (このとき, 与えられた立方体の体積は $1^3 = 1$), (1) の直後の「記号の定義」の要領で集合 $\mathbf{X}$, $\mathbf{D}$ を定義したとき, 次は同値である.

(a) 2 点 B, C $\in \mathbf{X}$ で $\mathrm{BC}^3 = 2$ (ただし, BC は 2 点 B, C の距離) を満たすものが存在する. つまり, 与えられた立方体の体積の 2 倍の体積をもつ立方体の 1 辺 BC が作図できる.

(b) $\sqrt[3]{2} \in \mathbf{D}$

(6″)

与えられた円の中心を点 O とし, 円周上の 1 点 A を任意にとる. そして, 2 点 O, A から (1) の要領で目盛りが付けられた x 軸, y 軸を作図し (このとき, 与えられた円の面積は $\pi \times 1^2 = \pi$), (1) の直後の「記号の定義」の要領で集合 $\mathbf{X}$, $\mathbf{D}$ を定義したとき, 次は同値である.

(a) 2 点 B, C $\in \mathbf{X}$ で $\mathrm{BC}^2 = \pi$ (ただし, BC は 2 点 B, C の距離) を満たすものが存在する. つまり, 与えられた円と同じ面積の正方形の 1 辺 BC が作図できる.

(b) $\pi \in \mathbf{D}$

このレポート課題の模範解答は, 例えば次のようなものになる.

立方体倍積問題の解法.

(6′)

与えられた立方体の 1 辺の長さだけ離れた 2 点 O, A から, (1) の要領で目盛りが付けられた x 軸, y 軸を作図し (このとき, 与えられた立方体の体積は $1^3 = 1$), (1) の直後の「記号の定義」の要領で集合 $\mathbf{X}$, $\mathbf{D}$ を定義したとき, 次は同値である.

(a) 2 点 $\mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathbf{X}$ で $\mathrm{BC}^3 = 2$ (ただし, BC は 2 点 B, C の距離) を満たすものが存在する. つまり, 与えられた立方体の体積の 2 倍の体積をもつ立方体の 1 辺 BC が作図できる.

(b) $\sqrt[3]{2} \in \mathbf{D}$

(証明)

$(a) \Rightarrow (b)$ $\exists \mathrm{B}\ (b_1, b_2),\ \mathrm{C}\ (c_1, c_2) \in \mathbf{X}$ s.t. $\mathrm{BC}^3 = 2$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2} &= \mathrm{BC} && [\because\ \mathrm{BC}^3 = 2\ ] \\ &= \sqrt{(b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2} \\ &\in \mathbf{D} && [\because\ \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathbf{X} \text{ と } (4) \text{ より }] \end{aligned}$$

$(b) \Rightarrow (a)$ 点 ($\sqrt[3]{2}, 0$) を P と表すとき, $\mathrm{P} \in \mathbf{X}$ [$\because$ (b) と (3)(III)(i) から分かる]. しかも, $\mathrm{OP}^3 = 2$. □

(7′)

$$x^3 - 2$$

は, $\sqrt[3]{2}$ を根にもつ $\mathbb{Q}$ 上の既約多項式である.

(証明)

- $\sqrt[3]{2}$ が $x^3 - 2$ の根であること : 明らか.
- $\mathbb{Q}$ 上の既約多項式であること :
  $x^3 - 2$ は有理数を根にもたないことが示されれば十分.
  [$\because$ $x^3 - 2$ は 3 次式であるから, (7) の証明と同様の理由から分かる.]
  しかし, $x^3 - 2$ の 3 根が $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}\,\omega$, $\sqrt[3]{2}\,\omega^2$ $\left(\text{ここで } \omega = \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2} \right)$ であり, $\sqrt[3]{2}$ が有理数でないことは (7) の証明と同じような方法で簡単に示せる. □

(8′)

$$\sqrt[3]{2} \notin \mathbf{D}$$

つまり, 与えられた立方体の体積の 2 倍の体積をもつ立方体の 1 辺は作図できない [$\because$ (6′)].

(証明) (7′) を用いると, (8) とまったく同じ議論により証明される. □

円積問題の解法.

(6″)

与えられた円の中心を点 O とし, 円周上の 1 点 A を任意にとる. そして, 2 点 O, A から (1) の要領で目盛りが付けられた x 軸, y 軸を作図し（このとき, 与えられた円の面積は $\pi \times 1^2 = \pi$）, (1) の直後の「記号の定義」の要領で集合 $\mathbf{X}$, $\mathbf{D}$ を定義したとき, 次は同値である.

(a) 2 点 B, C $\in \mathbf{X}$ で $\mathrm{BC}^2 = \pi$（ただし, BC は 2 点 B, C の距離）を満たすものが存在する. つまり, 与えられた円と同じ面積の正方形の 1 辺 BC が作図できる.

(b) $\pi \in \mathbf{D}$

（証明）

$(a) \Rightarrow (b)$ $\exists \mathrm{B}\ (b_1, b_2),\ \mathrm{C}\ (c_1, c_2) \in \mathbf{X}$ s.t. $\mathrm{BC}^2 = \pi$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} \pi &= \mathrm{BC}^2 \\ &= (b_1 - c_1)^2 + (b_2 - c_2)^2 \\ &\in \mathbf{D} \qquad [\because\ \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathbf{X} \text{ と } (4)(\mathrm{I}) \text{ より }] \end{aligned}$$

$(b) \Rightarrow (a)$ $\sqrt{\pi} \in \mathbf{D}$ [$\because$ 仮定 (b) と (4)(II) より]. よって, 点 $(\sqrt{\pi}, 0)$ を P と表すとき, $\mathrm{P} \in \mathbf{X}$ [$\because$ (3)(III)(i)]. しかも, $\mathrm{OP}^2 = \pi$. □

(8″)

$$\pi \notin \mathbf{D}$$

つまり, 与えられた円と同じ面積をもつ正方形の 1 辺は作図できない [$\because$ (6″)].

（証明） 背理法で証明する. $\pi \in \mathbf{D}$ と仮定する.

$$\exists \mathbb{Q} \text{ から始まる 2 次拡大体列} : \mathbb{Q} \subset Q_2 \subset Q_3 \subset \cdots \subset Q_{n+1} \quad \text{s.t.} \quad \pi \in Q_{n+1}$$

[$\because$ 今 $\pi \in \mathbf{D}$ であるので, (8) の証明と同様な議論により分かる].
さて, $[Q_{n+1} : \mathbb{Q}] = 2^n$, つまり $Q_{n+1}/\mathbb{Q}$: 有限次拡大. したがって, Q_{n+1} の任意の元は $\mathbb{Q}$ 上代数的 [$\because$ 定理 3]. つまり π は代数的数 [$\because$ $\pi \in Q_{n+1}$]. これは π が 超越数である事実に反する.
$\therefore\ \pi \notin \mathbf{D}$

□

VI. 受講生の感想

受講生の感想を紹介しよう.

- ギリシャ三大作図問題が，一見幾何学の問題に見えるのに，どれも今までに学んだ体論を使って解決できるというのが興味深かった．他の分野に応用でき，代数学はおもしろいと感じた．また，一つの分野だけから見ずに，他の分野から解法を考えることは大切だと感じた．

- 一見簡単そうに見える幾何学的な問題が, 近年まで解決されなかったことに驚きました. 数多くの数学者がこの問題を「図形上」において解決を試みたのではないかと思うが, 解決に貢献した「代数学」「体論」のすごさ, 奥深さに関心を大いに持ちました. 代数学の活用の幅が広がったように感じるし, 今回の証明を通しての論理の美しさに感動しました. 代数学は数学のあらゆる分野に通ずるのだ, と感じました. 逆に, 定木とコンパスによって作図できる事柄への感謝も感じました. この先, 教壇に立って作図を教える際, このようなことを考えられるようになって, 教えられるようにしたいと思います.

- ギリシャの三大作図問題すべてが, 代数学の体論を用いて解決できることにとても興味をもった. また, 演習問題の解答法は, ヒントなしには気づくことはできないだろうと感じた. 証明を読んでいて, わからないところが多々あり, 私の代数学に関する力不足をとても実感し, もう一度復習し, 力をしっかりとつけたいと思う. また, 後期の代数学の授業も通して, しっかりと学習したいと思う.

- 正直授業で三等分問題の解説を聞いているときはなかなか理解することができなかった. それは記号一つ一つの意味をしっかり押さえることができていなかった点や, 用語の正しいイメージができていなかったからだ. それは期末試験用に勉強したことで改善された. また理解できるということが数学のおもしろさにつながっていたようにも感じた. 作図問題は, 実際に作図することができるのではないかというパズルを解く気持ちをもちながらも, 代数的に考えないと証明することができないという面白い問題であった.

- ギリシャの三大作図問題を解決して, その歴史的背景を初めて知ったが, とても面白いと思った. こうした代数学の知識を駆使して解決する問題があって, 一見できそうな作図問題も,「ホラ, できないでしょ」と証明してしまう数学って, とてもきれいで奥深さも感じる. 生徒には, もっと数学の面白い部分, 計算や, ただ問題を解くだけでなく, その先にある数学という学問の楽しさといったものを伝えていけたらいいなと思った.

VII. 角の三等分問題の歴史

最後に, プラトンのルールに拘らないものも含めた, 三等分問題の研究の歴史を簡単に振り返ってみよう.

(1) **プラトンのルールに遵って定木とコンパスを用いたとき, 作図できないことの証明**

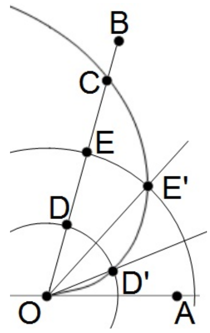
角の三等分問題は, 19 世紀初頭, まだ厳密な証明はされていなかったが, 多くの数学者は不可能と予測していたといわれている. そして, 1837 年, ピエール・ローラン・ワンツェル (1814 〜1848; フランス) によって, 「立方体倍積問題」および「角の三等分問題」が定木とコンパスだけで作図できないことが厳密に証明された. 彼は, 定木とコンパスによる作図可能点は, 直線・円の交点であり, この作図過程は 1 次方程式, 2 次方程式, 2^n 次方程式を解くことであることを利用し証明したが, まだ体という概念が無かった時代でもあり, かなり技巧的な証明である.

(2) 曲線を用いた角の三等分

ルネ・デカルト (1596〜1650; フランス) は「定木とコンパスもまた機械」と述べ, 作図を定木とコンパスに制限することに対する不満を表し, 制限を越えた作図法の様々な研究を行った. (デカルトは作図問題に代数的手法を導入するという貢献を行っており, これが 19 世紀での三等分問題の解決に繋がることになる.)

三大作図問題に関しても, この制限を外せば, 作図することは可能であり, ギリシャ時代以来, これらの問題を解決するために, 様々な曲線が発見・利用され, さらにそれらの曲線を描くための器具などが発明されてきた. そのうちのいくつかを紹介しよう.

(i) アルキメデス螺旋を用いた方法



アルキメデス螺旋とは, 平面上で 1 点 O の回りを一様に回転する半直線上の点, しかも点 O から出発して一様に遠ざかるものの描く軌跡であり, ある正の数 a を用いて点 O を極とする極方程式 (高等学校の「数学 III」で扱われるようになった) で

$$\rho = a\theta \quad (\theta \geq 0)$$

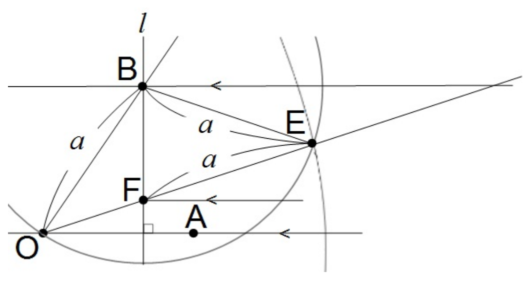
と表されるものである. アルキメデス螺旋は, 角の変化が半径の変化に比例するという性質をもち, この性質を使って, 角を三等分することができる.

$\angle$AOB が与えられたとき, この角度の三等分線を描いてみよう. 点 O を極, 直線 OA を始線とするアルキメデス螺旋を描く. アルキメデス螺旋と直線 OB の交点を C とし, OC を三等分する点をそれぞれ D, E とする. そして, 中心が点 O , 半径が OD, OE となる円をそれぞれ描き, それらとアルキメデス螺旋の交点を D$'$, E$'$ とする. すると, 直線 OD$'$, OE$'$ が, それぞれ $\angle$AOB の三等分線となる. (アルキメデス螺旋の定義から明らか. また, アルキメデス螺旋を描く道具は, 例えば [4, p132] 参照.)

(ii) ニコメデスが定義した曲線コンコイドを用いた方法

ニコメデス (B.C.280 頃〜B.C.210 頃; ギリシャ) によって考案された方法. ここで用いるニコメデスのコンコイドの描き方を説明しよう. 直線 l と, l 上ではない点 O, そして正の定数 a が与えられたとする. C を直線 l 上の点とするとき, 直線 OC 上の点 $\mathrm{D_C}$ を $\mathrm{CD_C} = a$ を満たすように, 点 O と反対側にとる. そして, 点 C が直線 l 上を動くとき, 点 $\mathrm{D_C}$ が描く軌跡をニコメデスのコンコイドと呼ぶ. (一般的なニコメデスのコンコイドの定義は, 例えば [4, p105] 参照).

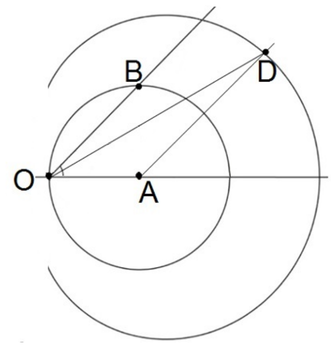
鋭角 $\angle$AOB が与えられたとき, この角度の三等分線を描いてみよう. 点 B から直線 OA に垂線を下ろそう. そして, この垂線を l, そして $a \overset{put}{:=}$ OB としてニコメデスのコンコイドを描く. また, 点 B を中心とする半径 a の円を描き, 図のように, この円とニコメデスのコンコイドとの交点 E をとる. このとき, 線分 OE は$\angle$AOB を三等分する. (簡単な初等幾何学の問題. ヒントとして, 図に補助線を描いておく. また, ニコメデスのコンコイドを描く道具も簡単に作れそう. 詳細は, 例えば [11, pp80-83] 参照.)



(*iii*) パスカルの蝸牛線 (リマソン (ラテン語でカタツムリの意味)) を用いた方法

1650 年にエチエンヌ・パスカル (有名なブレーズ・パスカルの父; 1588〜1651) が, 蝸牛線を用いることによって, 角を三等分する方法を編み出した.

ここで用いられる蝸牛線の描き方を説明しよう. 点 O, A が与えられたとする. 点 A を中心とし点 O を通る円 P を描き, B をこの円周上の点とする. 2 点 O, B を通る直線を描き, この直線上の点 C_B を, $BC_B = OA$ を満たすように, 点 O と反対側にとる. 点 B が円 P 上を動くとき, 点 C_B が描く軌跡を蝸牛線と呼ぶことにする (一般的な蝸牛線の定義は, 例えば [4, p108] 参照).



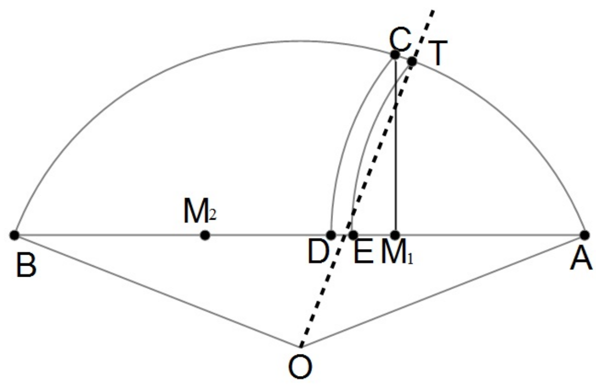
さて, 点 B が固定され, 鋭角 ∠AOB が与えられたとき, この角度の三等分線を描いてみよう. 点 A を通り線分 OB と平行な直線を描こう. 図のように, この直線と蝸牛線との交点 D をとるとき, ∠BOD が ∠AOB の三等分線である. (簡単な初等幾何学の問題. 蝸牛線を描く道具も簡単に作れそう. 詳細は, 例えば [11, pp83-86] 参照.)

(3) 定木とコンパスを使った角の三等分の近似法

三大作図問題と格闘していたのは, 数学者だけではない. 実際に三等分線を引くことを必要とする職人たちにとっても, これは大問題であった. そのような者たちにとって優先すべきことは, 厳密な証明ではなく, 作業現場でも実現でき, 実用しても問題の起こらないような精度をもった近似法を生み出すことであった. そのため, 定木とコンパスを使った近似法が数多く誕生した. ここでは, そのうちのいくつかを紹介する.

(*i*) デューラー法

1525 年, 画家としても有名なアルブレヒト・デューラー (1471〜1528; ドイツ) によって, 生み出された近似法. 彼は多くの技術書を書き記しており, その中の 1 つ「測定法教則」で様々な図形の説明や作図法を論じている.



∠AOB が与えられたとする. 今 OA = OB と仮定してよい. このとき, 点 O を中心とし点 A, B を通る円 P を描いておく. 円弧 AB とは, 点 O と反対側の円弧を意味するものとしよう. 線分 AB を考え, これを三等分する点 M_1, M_2 をとる. そして, 点 M_1 を通る線分 AB の垂線を引き, 円弧 AB と交わる点を C とする. 点 A を中心とし点 C を通る円を描き, 線分 AB との交点を D とする. 線分 DM_1 を三等分する点のうち点 D に近いものを E とし, 点 A を中心とし点 E を通る円を描く. そして, この円と円弧 AB との交点を T とする. このとき, 線分 OT が ∠AOB の三等分線の近似となる.

この方法は簡単なわりに精度がよく, 対象が 60° 以下の角度であれば, 誤差はわずかに $\frac{1}{3600}$° 以下である. 60° を超えると次第に誤差は大きくなっていくが, しかし 90° で

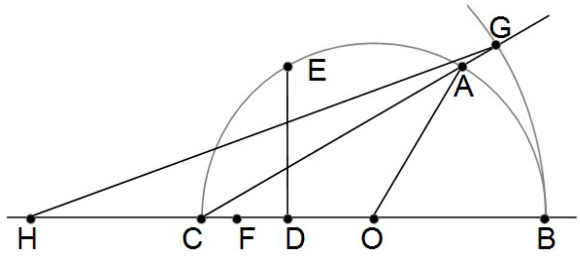
[1]誤差の計算については, 例えば [11, pp174-177] 参照.

も $\frac{16}{3600}°$ 程度である[1]. 大きな角も, 二等分や四等分してからこの方法を用いればよい. この程度の誤差であれば, 実用上は何の問題もないと言える.

(*ii*) コップ-ペロン法

コップが 1919 年に発案し, ペロンが 1929 年にさらに改良したものである.

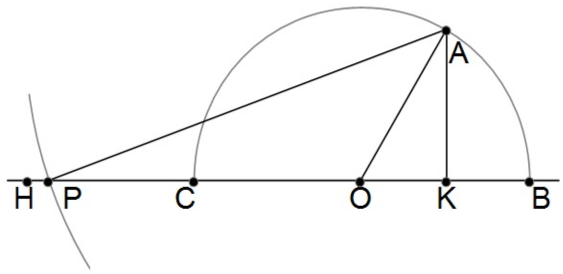
∠AOB が与えられたとする. 今 OA = OB と仮定してよい. 直線 OB 上に, 次の図のように, OB (= OA) = OC = CH となる点 C, H をとる. O を中心とし点 A, B, C を通る円を描く. 今, 円弧 AC とは点 O と反対側の円弧を意味するものとする. 線分 OC の垂直二等分線を引き, 線分 OC との交点を D, 円弧 AC との交点を E とする. さらに, 線分 CD 上に点 F を DF = $\frac{1}{3}$DE となるようにとる. 点 F を中心とし点 B を通る円を描き, 直線 CA を引くとき, これらの交点で点 A の側のものを G とする. このとき, ∠BHG が ∠AOB の近似三等分線となる.



この方法は, 角が 0° と 90° のときには正確である. 角が小さいときは, デューラー法より誤差は小さい. 20° 以下なら $\frac{1}{3600}$ 度以下の誤差であり, 約 70° で誤差は $\frac{15}{3600}$ 度ほどで最大となり, それより角が大きくなると誤差は減少していき, 90° で誤差が 0 になる. ただし, 90° を超えると急に誤差が大きくなる.[2]

(*iii*) カラハン神父の方法

ピッツバーグのドケース (Duquesne) 大学長のカラハン神父が 1931 年に発表した方法. 実際には昔から知られていた方法で, (*ii*) で紹介したコップ-ペロン法より精度は劣るが, 簡易さは上回っているものである. よく知られている次章の冒頭のエピソードもあるので取りあげてみよう.



∠AOB が与えられたとする. 今 OA = OB と仮定してよい. 点 O を中心とし点 A, B を通る円を描き, 直線 OB との交点で点 B とは異なるものを C とする. 直線 OB 上に, 図のように, 点 H を CH = CO となるようにとる. 点 A から 直線 OB に下した垂線の足を K とし, 点 A を中心とし, HK を半径とする円を描く. そして, 点 H の近くで 直線 OB と交わる点を P とすると, ∠APB はほぼ ∠AOB の 3 分の 1 になる.

VIII. 最後に

1837 年に不可能であることが証明された角の三等分問題であるが, 今だにこの問題に取り組む人が後を絶たない. たとえば, 大学長であったカラハン神父は, 先ほど紹介した近似法を角の三等分を解決したものとして小冊子を発表した. かなり好意的にとらえた記事が Times に出る!!!!! など一

[2]誤差の計算については [11, pp179-183] 参照.

時的に注目をあびた．しかし当然のことながら, 数学者たちはカラハンの論文を見ることもなくそれは間違いであると断言した．記者たちは, このような数学者たちの振る舞いにずいぶん驚いたようである ?????　実際に彼の発表した方法は, 角の三等分の近似作図法に過ぎないものであり, その論文の中では, 間違った議論さえ行われている．

こうしたチャレンジャーたちの証明は, 必ずどこかで不具合があるのだが, 中には巧妙なものもあり, 不具合をみつけることに, 時には数時間かかることもあるという．このため彼らは, 証明の確認を依頼される数学者たちから疎まれる存在となっている．ちなみに, Underwood Dudley の “What to do when the trisector comes” によると, こうした者たちの特徴として,

- 概して年配の人物で, 何年もそれに没頭している,
- 「不可能」という術語の意味を理解していない,
  (上述の記者たちもこれに当てはまるのであろう.)
- 数学をほとんど勉強していない,

という点があげられるという．

未だにこのような状況にある「角の三等分問題」は, 数学的な素養のない素人さえ挑戦する気持ちを誘発する, 永遠に魅惑的な (そして人騒がせな) 問題であり続けるのかもしれない．

謝辞． 山口大学創成科学研究科の倉富要輔准教授には, この論文を通読し問題点を指摘して頂きました．心からお礼申し上げます．

参考資料

[1] Jay R. Goldman 鈴木将史訳, 数学の女王 –歴史から見た数論入門–, 共立出版 2013

[2] 安藤清, 佐藤敏明, 初等幾何学, 新数学入門シリーズ 4, 森北出版 1994

[3] 石井寿一, 数学史を用いた解釈学的営みとしての授業研究 -円積問題を題材とした螺線の教材開発-, 中学校・高等学校数学科教育開発に関する研究 (13), 筑波大学数学教育学研究室, 103-112, 2006

[4] 礒田正美, Maria G Bartolini Bussi, 田端毅, 讃岐勝, 曲線の事典, 共立出版 2009

[5] 入江俊夫, 内的関係の生成とウィトゲンシュタインの数学の哲学, 千葉大学人文社会科学研究 No.16, 111-119, 2008

[6] 大野栄一, 定木とコンパスで挑む数学, ブルーバックス B-986, 講談社 1993

[7] マーティン・ガードナー著, 一松信 訳, 数学カーニバル II, 紀伊國屋書店, 1977

[8] 窪田忠彦, 初等幾何学作図問題, 内田老鶴圃 1952

[9] 佐々木重夫, 幾何入門, 岩波全書 1979

[10] 東郷重明, 代数入門, サイエンス社 1977

[11] 矢野健太郎, 一松信 解説, 角の三等分, 筑摩書房 2006

[12] 吉川敦, デューラーの「幾何学世界」について, 数理解析研究所講究録, 第 1546 巻, 2007, 65–76