ピタゴラス音律から新しい音律へ
— 小学校専門科目「数学」での実践 —

馬場良始（ばば よしとも）
（大阪教育大学 数学教育講座）

（ 平成 25 年 3 月 31 日受付 ）

概要： 2011 年度に続き 2012 年度にも，小学校専門科目「数学」の授業で「ピタゴラス音律」と「平均律音律」を取りあげ，数学者がどのように「音楽」分野の基礎作りを行ったかを講義した。昨年は，全２回の講義の１回目「ピタゴラス音律」の講義報告 [11] を行った。この論文では，２回目「平均律音律」に関する１時間半の講義の前半部分の講義報告を行う。

検索語： ピタゴラス音律

I. 始めに

前回の講義では，ピタゴラス音律が，古代ギリシャの数学者であるピタゴラス（紀元前 580 年頃～紀元前 500 年頃）の学派によって，史上初の音律として生み出され，少なくとも 16 世紀頃までは，最もポピュラーな音律として使われ続けたことを述べた。しかしルネサンス期になるとピタゴラス音律の改良が試みられ，ピタゴラス音律は次第にマイナーな存在になっていく。この講義の前半として，まずその理由を解説する。

II. ピタゴラス音律から新しい音律へ

1. まず２音の和音を聴いてみよう

２音を同時に鳴らしたとき，それらが協和して心地よい音になることもあるし，反対に不協和で不快な音になることもある。まずは実際に，１オクターブ以内の２音の和音をすべて体験してみよう。その前に，予備知識を２つ。

(1) 中世までは，振動数比が 4 以下の自然数で表される２音，つまり，

完全１度	(1 : 1)	(例えば，「ド–ド」同じ音高の２音)
完全８度	(1 : 2)	(例えば，「ド–1 オクターブ上のド」)
完全５度	(2 : 3)	(例えば，「ド–ソ」)
完全４度	(3 : 4)	(例えば，「ド–ファ」)

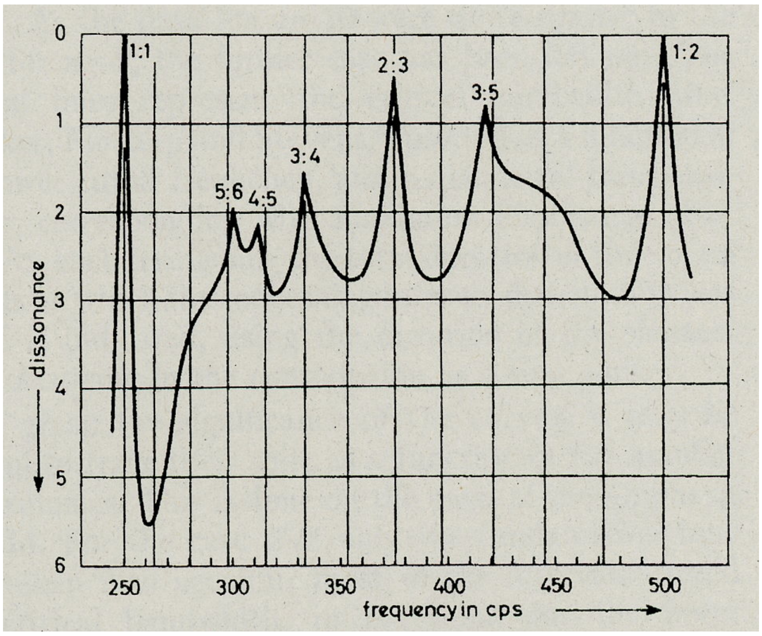
（左側の括弧内が，２音の振動数比）の４つだけが協和する音程と考えられていた。これらは現在，**完全協和音程**と呼ばれている。

また,

- 長３度 (4 : 5) (例えば,「ド−ミ」)
- 短３度 (5 : 6) (例えば,「ド−ミ♭」)
- 長６度 (3 : 5) (例えば,「ド−ラ」)
- 短６度 (5 : 8) (例えば,「ド−ラ♭」)

は, 現在では完全協和音程に次いで協和度が高いと認められ, **不完全協和音程**と呼ばれているが, ヨーロッパでは中世まで協和音程とは認められていなかった。その理由は, 当時使われていたピタゴラス音律を使ったとき, 4つの完全協和音程はちょうど 1 : 1, 1 : 2, 2 : 3, 3 : 4 という理想的な振動数比になり, これらの和音本来の協和した響きが得られるのに対し, 長３度, 短３度, 長６度は本来の協和した響きが味わえる理想的振動数比 4 : 5, 5 : 6, 3 : 5 から比較的大きく(どれも約 21.51 セント [11, pp. 87-88], [12, p. 62]) ずれており, 不協和であったからだと言われている。完全協和音程と不完全協和音程以外は, **不協和音程**と呼ばれている。

(2) オランダの心理学者 R. Plomp, W. J. M. Levelt は 1965 年に 2 音の協和性に関する心理学実験を行い, その結果を材料にして計算で得られた, 次のような 2 音の協和度のグラフを発表している。[21, p. 556] (計算方法は後で紹介する。) これは, 1 音を 250 Hz に固定し, もう 1 音を 250 Hz からその倍の 500 Hz を少し超えるところまで変化させていったときの, 2 音の協和性を表すグラフである。



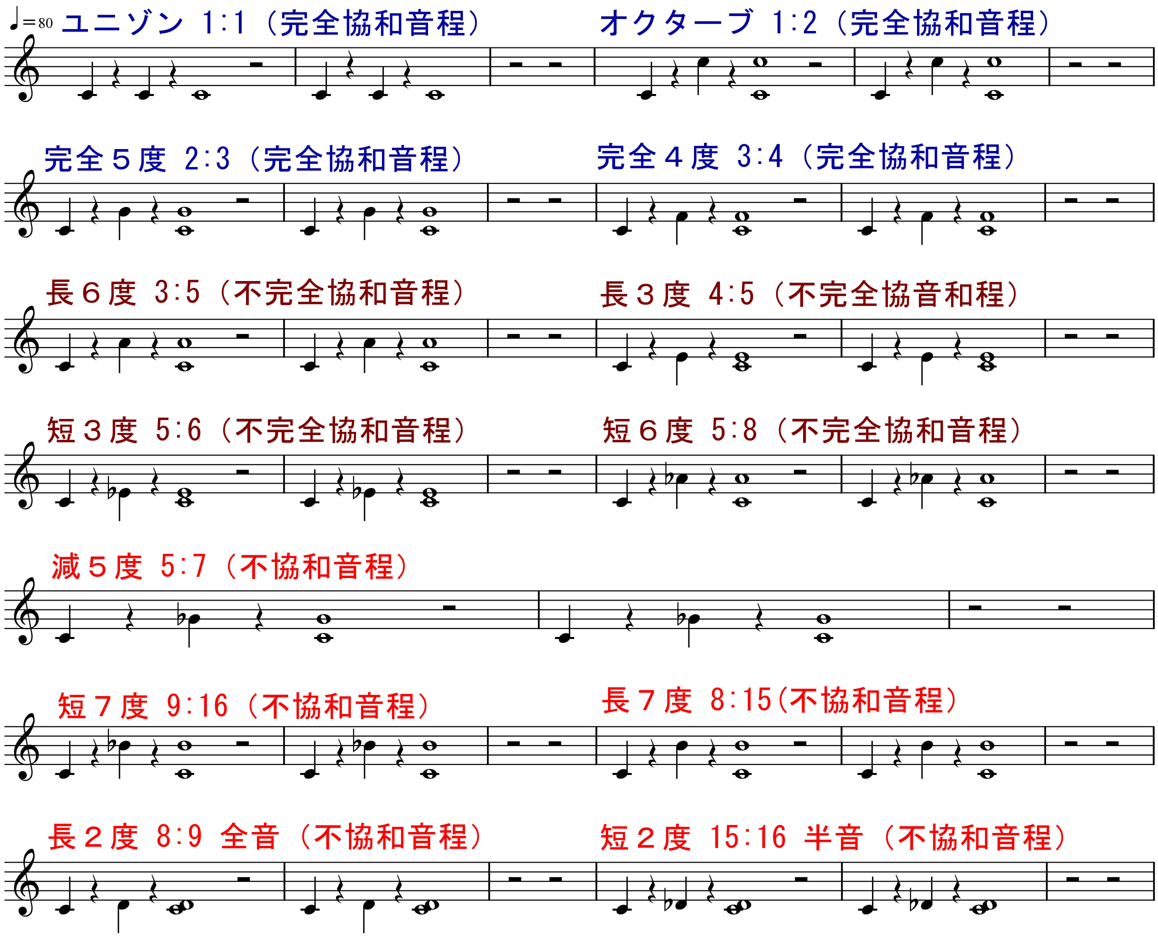
[21, p. 556] から引用

この結果によれば, 完全1度 (1 : 1), 完全8度 (1 : 2) は不協和度 0 であり, 文字通り「完全に」協和することがわかる。次いで完全5度 (2 : 3) がわずかな不協和度をもつだけであり, 非常に協和度の高い音程であることが分かる。(ピタゴラスがこれに注目してピタゴラス音律を作ったのも頷ける。) さらに, 長6度 (3 : 5), 完全4度 (3 : 4), 短3度 (5 : 6), 長3度 (4 : 5) が

続き，これらから少しでも外れると，とたんに協和度が下がることが分かる。そして，短２度 (半音) は飛び抜けて協和度が低いので，非常に耳障りな音になることが予想される。

注．「音程」という言葉は，２音の音の高さの隔たり (英語では “**interval**”) を意味する。プロも含めた音楽家の間では，１音の音の高さそのもの (英語では “**pitch**”) の意味で用いられることがあるが，これは本来「音高」という言葉を用いなければならない。

では１オクターブ内の２音の和音を聴いてみよう。 (下記の楽譜に従って，実際に音を聴いてもらう。)



2.　２音に協和・不協和が起こる理由

なぜこのように，よく響き合う２音と全く響き合わない２音があるのであろうか？ 理由を説明するために，準備としてまず次の３つの話をしよう。

準備１　倍音とフーリエ分解

準備２　人間の耳の仕組み

準備３　異なる振動数の２純音 が同時に鳴っている場合の聞こえ方

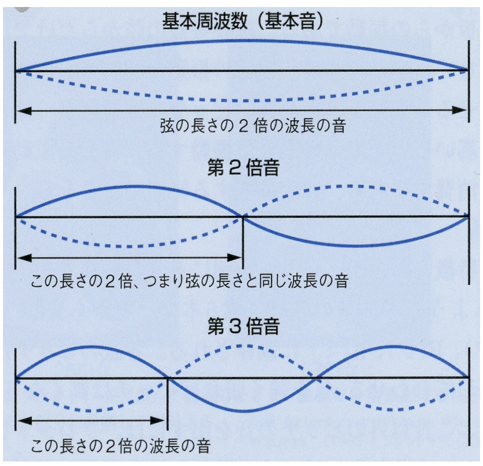
準備１　倍音とフーリエ分解

例えば，261.6 Hz の「ド」の音が鳴る弦を弾いてみる（笛を吹いてみる）。このとき，261.6 Hz の「ド」の音を発している**基本音**（**基音**）に加えて，通常次のような音が同時に発生する。

- 基本音の２倍の振動数の**(第)２倍音**。（１オクターブ上の 523.2 Hz の「ド」の音。）
- 基本音の３倍の振動数の**(第)３倍音**。（784.8 Hz の「ソ」の音。）
- 基本音の４倍の振動数の**(第)４倍音**。（２オクターブ上の 1046.4 Hz の「ド」の音。）
- 基本音の５倍の振動数の**(第)５倍音**。（1308.0 Hz の「ミ」の音。）

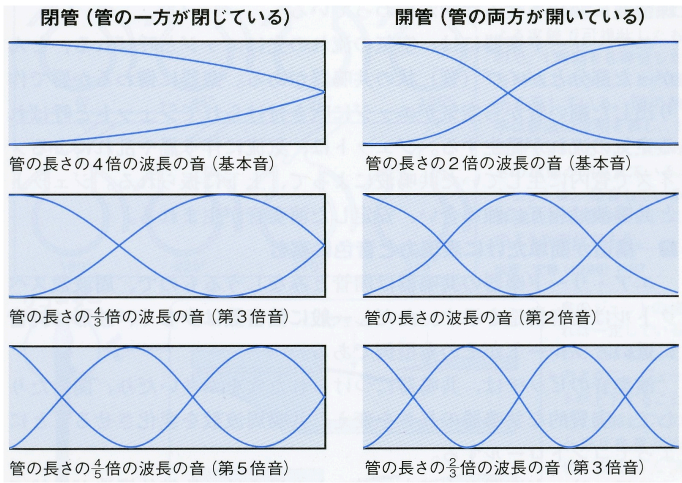
⋮

これらを**倍音**と総称する。倍音が発生する理由は，次の図（弦, 閉管の管楽器, 開管の管楽器の３種類）の１番上に示された基本音の振動には，その下のような倍音の振動が自然と同時に起こってしまうからである。通常，音量（振幅）は基本音，２倍音，３倍音，４倍音，５倍音，$\cdots$ と次第に小さくなる。（下の真ん中の図のように，閉管の管楽器は偶数倍音が出ないが。）



[3, p. 119] から引用

弦を弾いたときの基本音，２倍音，３倍音の振動のようすを表している。振動数と波長は反比例の関係にあるので [11]，波長が $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$ になれば，振動数は 2，3 倍になる。



[3, p. 111] から引用

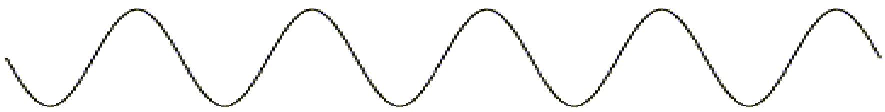
左の図は閉管（クラリネット。右側が歌口），右の図は開管（フルート）で倍音が発生するようすを表している。実際には音は疎密波であるので，膨らんだ部分（振動の腹）は最も激しく疎密を繰り返している部分，線が交わった部分（振動の節）は空気の密度が上がり疎密がほとんど起こっていない部分を表している。開管は２倍音，３倍音，$\cdots$ とすべての倍音が発生するのに対し，閉管は偶数倍音が発生せず奇数倍音のみが発生するが，その理由がこの図から見て取れる。また，オーボエ, サックス，$\cdots$ は閉管であるが，管の形状が円筒ではなく円錐形であるため偶数倍音に相当する波長の振動も起こり，分類上は開管とされることもある。また，金管楽器も開口部に大きな円錐形のベルが付いているためすべての倍音が発生する。（クラリネットも，小さな円錐形のベルが開口部に付いているため，偶数倍音も少しだけ発生する。）

注 1. 倍音に関する記述はギリシャ時代から存在する。しかし，初めてその詳細な研究を行ったのはメルセンヌ (1588 年 ～ 1648 年： フランスの神学者・数学者) であり，著書「普遍的調和 : 音楽の理論と実際」にその研究成果が書かれている。そこでは，２倍音，３倍音，４倍音，$\cdots$ を具体的に述べ，さらにこれらを音色と関係づけている。[4, pp. 93-94]

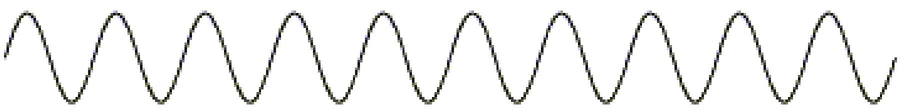
注 2. [19, pp. 86-87] には，各倍音成分がその音に与える音色について，次のように記述されている。２倍音は音に明確さと輝きを与えるが，それ以外の効果はない。３倍音も音に輝きを与えるが，いくらか空虚感を与え，かすれた音または鼻音のような音色を作る。４倍音はさらに多くの輝きと，ふつうには音に鋭さを与える。５倍音は音に豊かさを与え，若干ホルンに似たような音色を作る。６倍音は鼻音のような音色の微妙な鋭さを加える。以上の倍音は，基音と長３和音 (「ド・ミ・ソ」) を構成する諸音であるが，７倍音以上の奇数倍音はそうではない。そのために，これらは不協和を生み出し，実際には粗さもしくは硬い響きを加える。

基本音 (正弦波) だけの音を**純音**と呼ぶ。純音は人工的に作るしかない。ＮＨＫラジオの時報 (ＮＨＫテレビの時報もそうであったが，地上デジタル放送では地域や受信機によって遅延時間が異なり正確なタイミングで放送できないため廃止された) の最初のポッポッポッは 440 Hz の純音の「ラ」の音であり，最後のポーはその２倍の振動数 880 Hz の純音である。(１オクターブ高い「ラ」の音。)

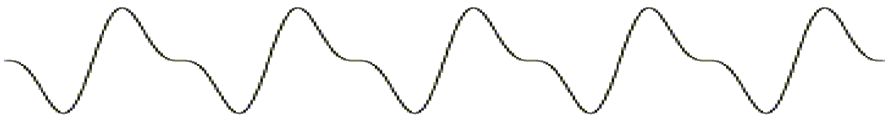
例えば，440 Hz の基本音 (正弦波)



に，その２倍音の 880 Hz を，基本音より振幅が少し小さい正弦波



として加えると，



という少し複雑な波形の音が得られる。多くの楽器の音や人間の声は，このように，基本音とその倍音の複合音であることが知られている。つまり，その音の波形 $f(t)$ は**フーリエ級数**と呼ぶ

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega\, 2\pi\, t) + B_n \sin(n\omega\, 2\pi\, t))$$

の形で表されるのである。これを音の**フーリエ分解**と呼び，A_n, B_n を**フーリエ係数**と呼ぶ。

注. 三角関数の合成公式（高校の「数学 II」）：$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha)$（ただし，$\alpha$ は $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ をみたすもの）を思い出すと，フーリエ級数は確かに正弦波を足し合わせたものであることが分かる。

また，音をフーリエ分解したとき，1 つの基本音に，どのような割合で，そしてどのような位相で（つまり，上の注の α がどのような値で）n 倍音が含まれているか，そして時間とともにそれがどう変化していくかで，その音の音色が決まる。（音の立ち上がりが，かなり音色に影響を及ぼすようである。）つまり，フーリエ係数 A_n，B_n（$n = 1, 2, 3, \cdots$）が時間とともにどのように変化していくかによって，それがピアノなのかヴァイオリンなのか，もっと言えば，スタインウェイ・ピアノなのかヤマハ・ピアノなのか，またストラディバリのヴァイオリンなのかグァルネリのヴァイオリンなのかが決まる。（このような A_n，B_n の経時的変化を受けて，人間がどのように音色を認識するのかという心理学的側面からの研究も詳細に行われている。）

音がフーリエ分解されることは，18 世紀にスイスの数学者・物理学者ダニエル・ベルヌーイ（1700 年～1782 年）により発見され，19 世紀フランスの数学者ジョセフ・フーリエ（1768 年～1830 年）が作り出したフーリエ級数によって体系的に理論化された。

準備 2　人間の耳の仕組み

次の図 1 は人間の耳の断面図である。

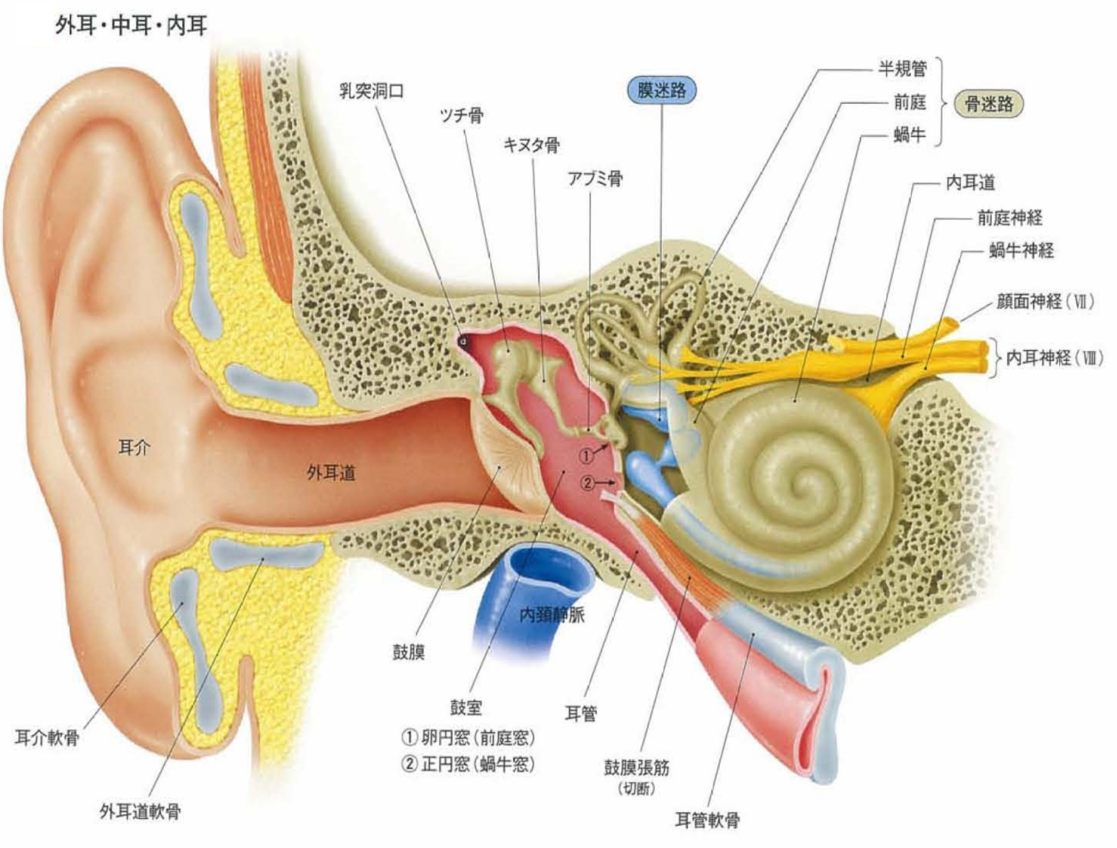


図 1 [13, p. 64] から引用

内耳には**蝸牛**(かぎゅう)と呼ばれるカタツムリの殻のように渦を巻いている部分がある。鼓膜の振動は，中耳の**ツチ骨**(こつ)**・キヌタ骨**で 60 倍に ([7, p. 67]) 増幅され，内耳に空いた 2 つの窓 (膜で中耳と隔てられている) の 1 つ **卵円窓**(らんえんそう) ① に張り付いている**アブミ骨**に伝えられる。そしてリンパ液で満たされている内耳にアブミ骨の振動が伝わる。

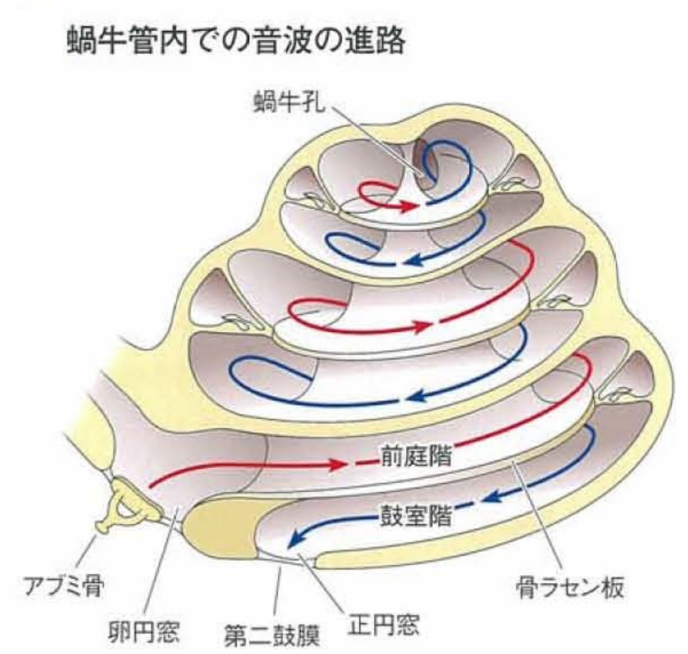


図 2 [13, p. 67] から引用

図 2 は蝸牛内部である。蝸牛の内部は 2 回転半のトンネルのようになっており，さらに各階は膜で**前庭階** (上りの矢印が書かれている階)，**中央階** (断面が三角形の階)，**鼓室階** (下りの矢印が書かれている階) の 3 層に分かれている。卵円窓から入ってきた振動は，前庭階を通って蝸牛頂まで伝わり，そこに繋がっている鼓室階に入り，それを通って蝸牛底まで伝わり，最後は **正円窓**(せいえんそう) (図 1 では ②) に張られている薄膜 (第二鼓膜) へ伝わる。リンパ液はほとんど圧縮することができないので，伝わってきた振動はここで吸収される。

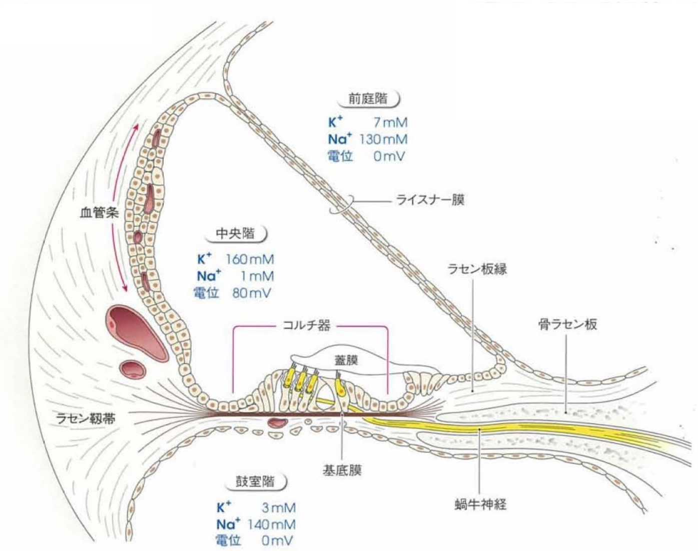


図 3 [13, p. 67] から引用

図 3 は中央階の拡大図である。ここにリンパ液を伝わってきた振動で上下に振動する基底膜と，聴覚の終末感覚受容器である**コルチ器**がある。基底膜は，蝸牛底では幅が狭く堅いため高い振動数 (20,000 Hz まで) に同調し，蝸牛頂に向かうにつれ幅が広く柔らかくなり低い振動数 (100 Hz 以下まで) に同調する性質がある。そのため，高い振動数の振動は蝸牛底に近いある箇所で最大振動し，膜のそれ以外の部分はあまり動かない。逆に，低い振動数の振動は蝸牛頂に近いある箇所で最大振動し，膜のそれ以外の部分はあまり動かない。つまり振動の最大点は振動数に依存し，基底膜は入ってきた音に含まれているフーリエ係数 A_n，B_n を調べるフーリエ分析器のような働きをしている。

図 4 は，基底膜の振動をコルチ器がどのようにして感知するかを表している。コルチ器は有毛細胞とその支持細胞からなり，その上にはゼラチン質の蓋膜が覆い被さっている。基底膜が振動でもち上がったとき，それに載っている有毛細胞ももち上げられ，有毛細胞の頂部に密生している感覚毛と呼ばれる微繊毛（図 5 参照）が蓋膜と触れ傾く。その情報が神経を通って脳に送られる。

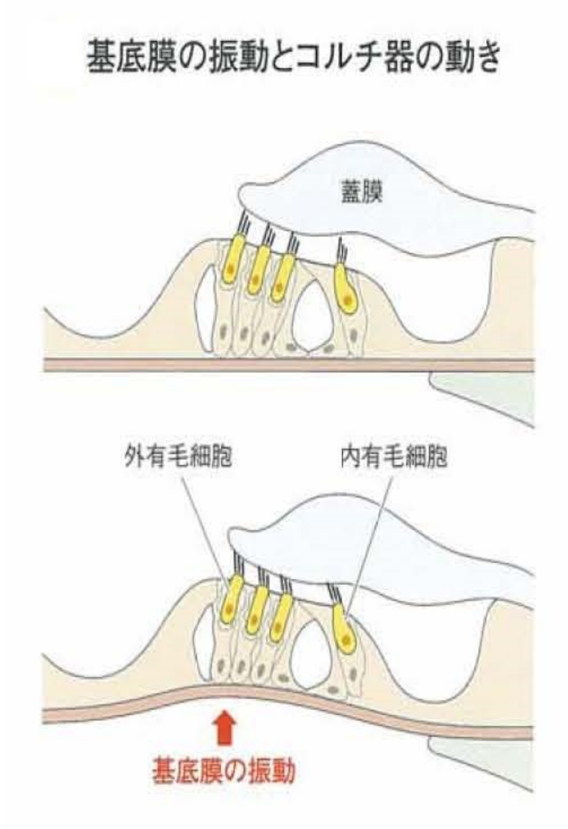


図 4 [13, p. 69] から引用

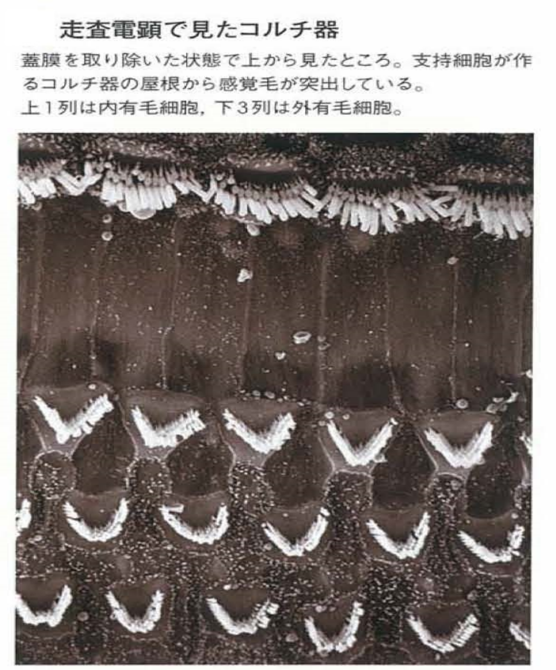


図 5 [13, p. 69] から引用

では，異なる振動数の 2 純音が同時に鳴っている場合，基底膜はどうような状態になるのであろうか？ 実は，次のようになる。

(1) 振動数が十分離れていれば，基底膜上に 2 つの最大点が，それぞれの音が単独で鳴らされたときと同じ地点にはっきりと現れ，しかもそれぞれが正弦波振動をする。

(2) 2 音の振動数が比較的に近い場合は，基底膜上の振動パターンは互いに影響し合い，両方の音に対応する点が基底膜上にできはするが，振動のようすは正弦波ではなく，2 音の相互作用によってできた複合波型になる。

(3) 2 音の振動数がもっと近い場合は，2 音に対応する最大点を分離することはできず，よりゆるやかな最大点が 1 つだけ見られる。

このような基底膜の振動情報を受けて，脳は音がどのように鳴っていると受けとめるのであろうか？ (1) の場合は，脳は 2 つの音それぞれの振動数を独立して感じ取ることができる。しかし (2), (3) の場合はどうであろうか？ それを，次の準備 3 で考えてみよう。

準備３　異なる振動数の２純音が同時に鳴っている場合の聞こえ方について

まずは，２純音の協和性について数学的に少し掘り下げてみよう。

振動数が $f_1, (<) \ f_2$ の２つの正弦波を合成してみると（高校の「数学 II」）

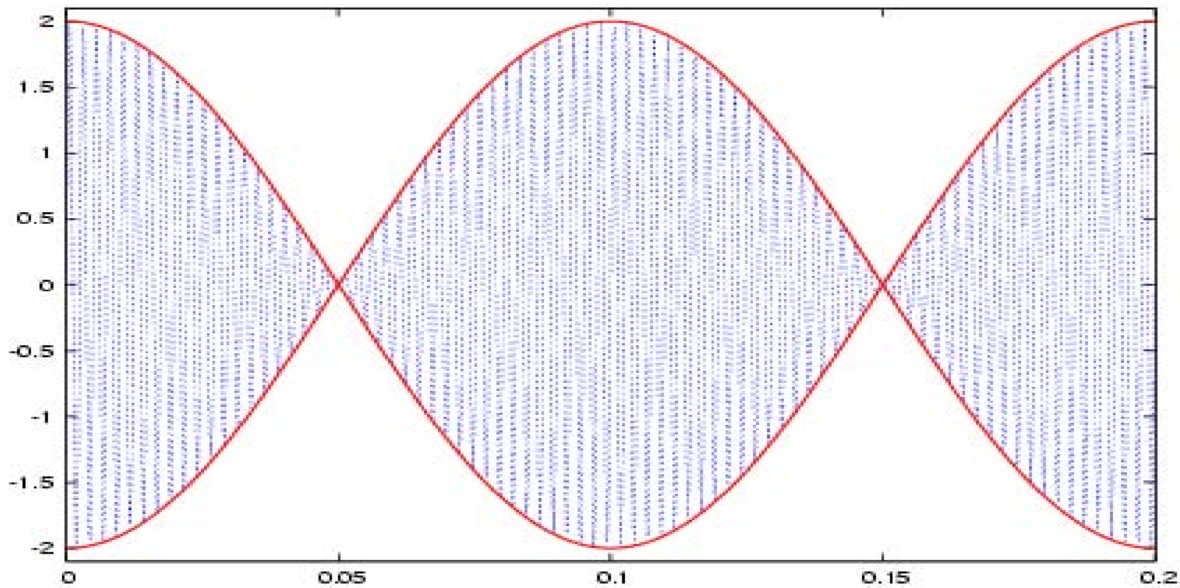
$$\begin{aligned} s(t) &= \sin(\,2\pi\, f_1\, t\,) + \sin(\,2\pi\, f_2\, t\,) \\ &= 2\,\sin\left(\,2\pi\,\frac{f_1+f_2}{2}\,t\right)\,\cos\left(\,2\pi\,\frac{f_2-f_1}{2}\,t\right) \end{aligned}$$

よって，例えば近接した２音 $f_1 = 400$，$f_2 = 410$ を考え，代入すると

$$\sin\left(\,2\pi\,\frac{f_1+f_2}{2}\,t\right) = \sin(\,405 \times 2\pi\, t\,)$$

$$\cos\left(\,2\pi\,\frac{f_2-f_1}{2}\,t\right) = \cos(\,5 \times 2\pi\, t\,)$$

なので $y = s(t)$ のグラフを描くと，



つまり，１秒間に５回振動する正弦波（5 Hz）（グラフでは外側の太線）の中に，１秒間に 405 回せわしなく振動する正弦波（405 Hz）（細かいため模様にように見えている）が描かれた形となる。音としては，405 Hz（f_1 と f_2 の相加平均 $\dfrac{f_1+f_2}{2}$）の音が，１秒間に 10 回（ちょうど f_1 と f_2 の差）強弱を繰り返すように聞こえる。これを**うなり（ビート）**と呼ぶ。

さて，同じ振動数 $f_1, (=) \ f_2$ の２純音が鳴っているときに，f_1 はそのままにして f_2 を少しずつ高い値に変化させてみよう。$\Delta f = f_2 - f_1$ とおく。

(1) f_2 を少し増加させたとき，すでに計算した通り，１秒間に Δf 回のうなりを伴った $\dfrac{f_1+f_2}{2}$ Hz の単音が聞こえる。$\Delta f \leq 10$ のとき，このうなりはハッキリ知覚される。

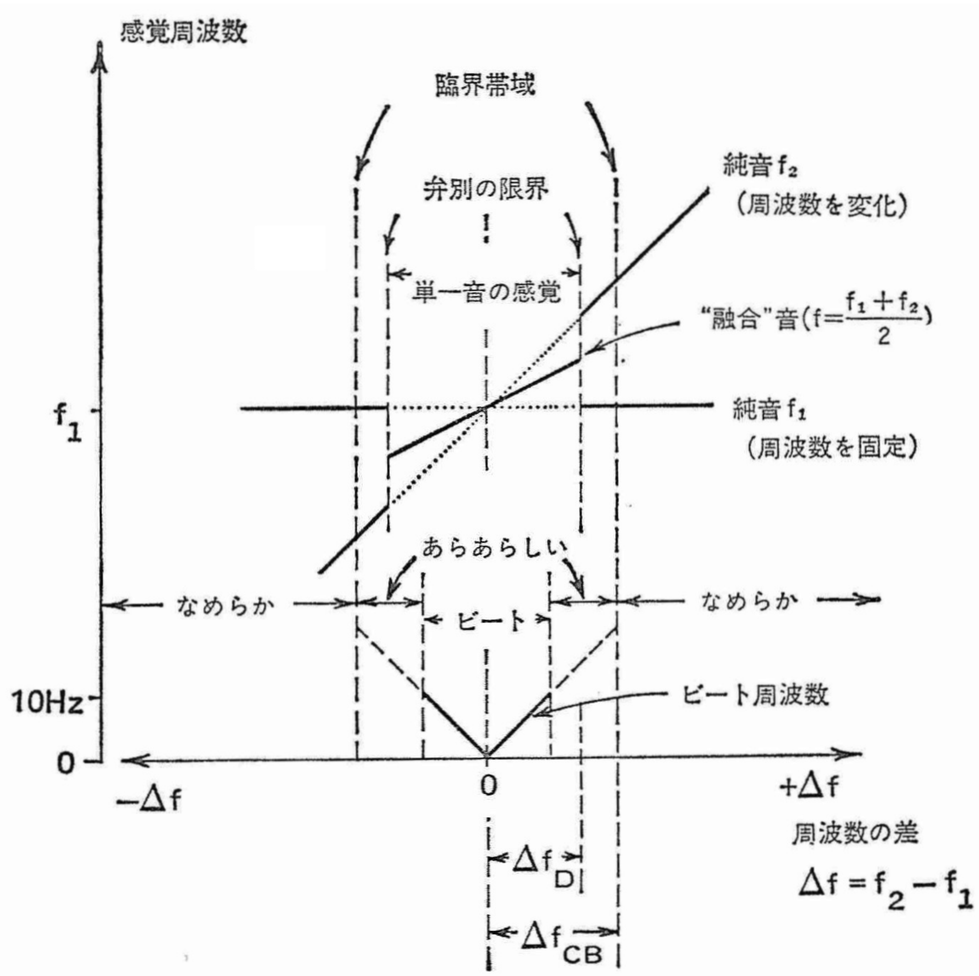
(2) $\varDelta f$ が 15 Hz 辺り以上になると，特有の「あらあらしさ」(不快感) が生じ始め，うなりは次第に消えていく。

(3) さらに f_2 を増加させていくと，振動数が f_1 と f_2 に相当する 2 音が識別できるようになる。このときの $\varDelta f$ を **振動数 (周波数) 弁別の限界**と呼び $\varDelta f_D$ と表す。(「振動数弁別の限界」を超えた瞬間に，基底膜上には 2 つの最大点が現れる。) しかし，あらあらしさは継続している。

(4) さらに f_2 を増加させていくと，あらあらしさは徐々に無くなっていき，$\varDelta f$ が**臨界帯域**と呼ばれる値を超えたあたりで，両方の純音がなめらかで気持ちよく聞こえ始める。臨界帯域は $\varDelta f_{CB}$ で表される。

このような聞こえ方の変化は，基底膜が不完全なフーリエ分析器であることによる。実際，2 音 f_1 と f_2 を両耳に分けて聞かせると，たとえそれらが隣接していても 2 音をハッキリ聞き分けることができ，しかも常になめらかである。

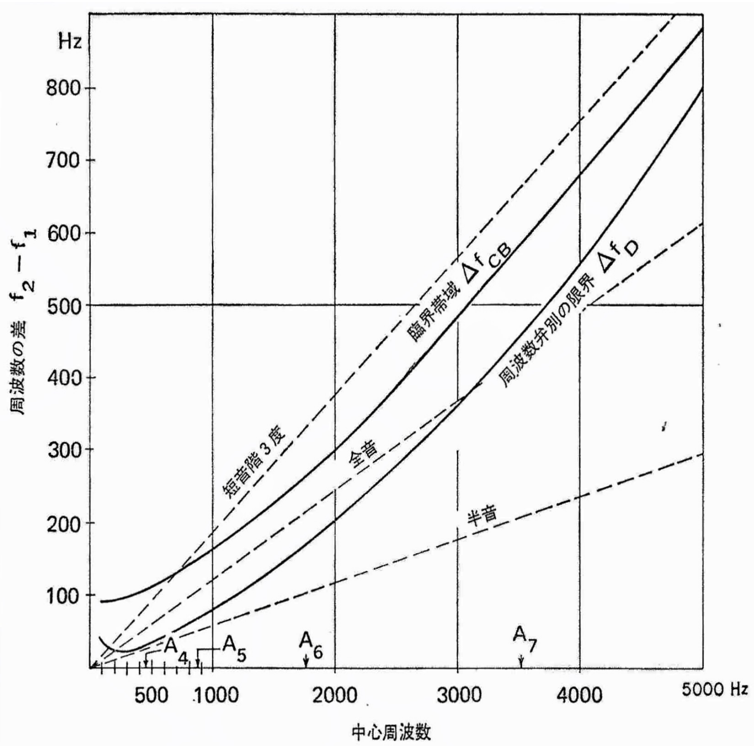
今述べたことを図にすると，次の図のようになる。



太線は，2 純音の差 $\varDelta f = f_2 - f_1$ の変化に伴う聞こえる音の振動数 (周波数) の変化を表す。

[16, p. 47] から引用

「振動数弁別の限界」と「臨界帯域」は個人差がかなり大きいことが知られているが，それらの値はおおよそ次の左のグラフで表されるものとされている。ちなみに，このグラフの「臨界帯域」の曲線はその右側の表を元に描かれている。



臨界帯域 Δf_{CB}（Zwicker, Flottorp, Steves 1957）および周波数弁別の限界 Δf_D (Plomp 1964)。
ただし，横軸は２音の刺激の周波数で，３つの音程に相当する周波数差も比較のため示す。

[16, p. 49] から引用

	20		
90	110	65	90
90	200	155	95
95	295	250	95
100	395	345	105
108	503	450	110
120	625	560	130
130	755	690	140
145	900	830	150
160	1060	980	175
190	1250	1155	200
210	1460	1355	225
240	1700	1580	255
270	1970	1835	295
320	2290	2130	350
380	2670	2480	420
450	3120	2900	500
560	3680	3400	620
680	4360	4020	760
840	5200	4780	920
1000	6200	5700	1150
1300	7500	6850	1550
1800	9300	8400	2100
2400	11700	10500	2800
3300	15000	13300	4000
		17300	

この表は左右対称に書かれている。２, ３列目は音の振動数であり，２（３）列目の上下の値の中心振動数 (周波数) が３（２）列目に，２（３）列目の振動数のすぐ左 (右) 下にその音の振動数の高い方への臨界帯域が書かれている。例えば，20 Hz の音の振動数の高い方への臨界帯域が 90 Hz であり，90 Hz 高い音がすぐ下の 110 Hz であると読める。

[24, p. 557] から引用

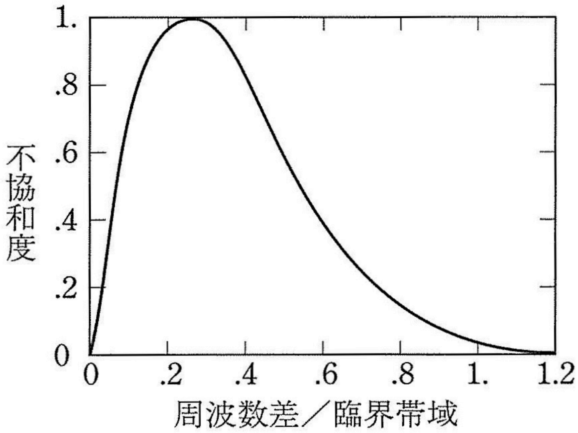
このグラフや表から次のことが分かる。

(*i*) 振動数 (周波数) 弁別の限界 Δf_D の曲線が半音を表す点線の上方にある。したがって，半音離れた２音の弁別は難しい。

(*ii*) 臨界帯域 Δf_{CB} について観察すると，表から，低い音域ではほとんど値が変化していない。20 Hz という人間の可聴域の下限でも 90 Hz であり，440 Hz の「ラ」(国際式の音名表示では A4) 辺りでも 110 Hz である。そして，690 Hz までは短３度より広い。(実際，短３度の振動数比を $5:6$ とするとき，690 Hz から短３度上の音程は $690 \times \frac{6}{5} - 690 = 138$ Hz である。一方，690 Hz から振動数の高い方への臨界帯域は 140 Hz であり，まだ臨界帯域の方が値が大きいことが分かる。) 755 Hz のところで初めて，短３度より狭くなる。(実際，$755 \times \frac{6}{5} - 755 = 151 > 145$) そして，700 Hz の「ファ」(F5) の辺りより高い振動数の領域においては，ずっと全音 (長２度) と短３度の間にある。

注. 「振動数弁別の限界」は，一定の強さの２純音に対して考えられた概念である。しかし，楽器等で２音を鳴らす場合は，一定の強さであることはほとんどない。さらに，左右２つの耳があるためステレオ効果も存在する。そのため，聴覚システムに付加的な情報が与えられ，それを手掛かりに，実際には半音離れた２音が聞き分けられることがある。

そして，臨界帯域内での音の不協和度は，オランダ人心理学者 R. Plomp, W. J. M. Levelt が，[21, p. 556] で与えた右のグラフから分かる。このグラフは，20 歳前後の約 90 人の被験者に２純音の協和・不協和度を７段階で評価させ，そのデータから導き出したものである。



[5, p. 88] から引用

このグラフから，ある音 (振動数は問わない) は，$\dfrac{\text{振動数差}}{\text{臨界帯域}}$ が 0.25 となる音と１番不協和であることが分かる。

具体的に幾つかの音で調べてみると，

(1) 440 Hz の「ラ」(A4) について考えてみると，臨界帯域は，振動数の低い方に約 105 Hz，高い方に約 110 Hz であるので，低い方に約 $105 \times 0.25 \fallingdotseq 26$ Hz，高い方に約 $110 \times 0.25 \fallingdotseq 28$ Hz 離れた音が１番不協和。つまり，ちょうど半音離れた隣の 415.3 Hz の「ソ♯」と 466.2 Hz の「ラ♯」が１番不協和である。

　さらに，440 Hz の「ラ」より高いすべての音は，同様に半音離れた音と１番不協和であることが分かる。

(2) １オクターブ下の 220 Hz の「ラ」(A3) について考えてみると，臨界帯域は，振動数の低い方に約 90 Hz，高い方に約 95 Hz であるので，低い方に $90 \times 0.25 \fallingdotseq 23$ Hz，高い方に $110 \times 0.25 \fallingdotseq 28$ Hz 離れた音が１番不協和。つまり，ちょうど全音離れた 196.0 Hz の「ソ」(G3) と 246.94 Hz の「シ」(B3) が１番不協和である。

(3) さらに１オクターブ下の 110 Hz の「ラ」(A2) について考えてみると，臨界帯域は，振動数の低い方も高い方も約 90 Hz であるので，どちらも約 28 Hz 離れた音が１番不協和。つまり，ちょうど完全４度離れた 82.41 Hz の「ミ」(E2) と長３度離れた 138.59 Hz の「ド♯」(C♯3) が１番不協和である。

このように，低い音域では臨界帯域がほとんど変化しないために，和声学的には協和音程であるはずの短３度・長３度・完全４度・ $\cdots$ が，音域によっては不協和音程になることが分かる。(音楽家はこのようなことを十分承知していて，低音部で３度音程などを多用しないのが普通である。Plomp らの研究は，このような経験則を科学的手法によって検証したものである。)

準備 1 , 2 , 3 から，次のようなことを知った。

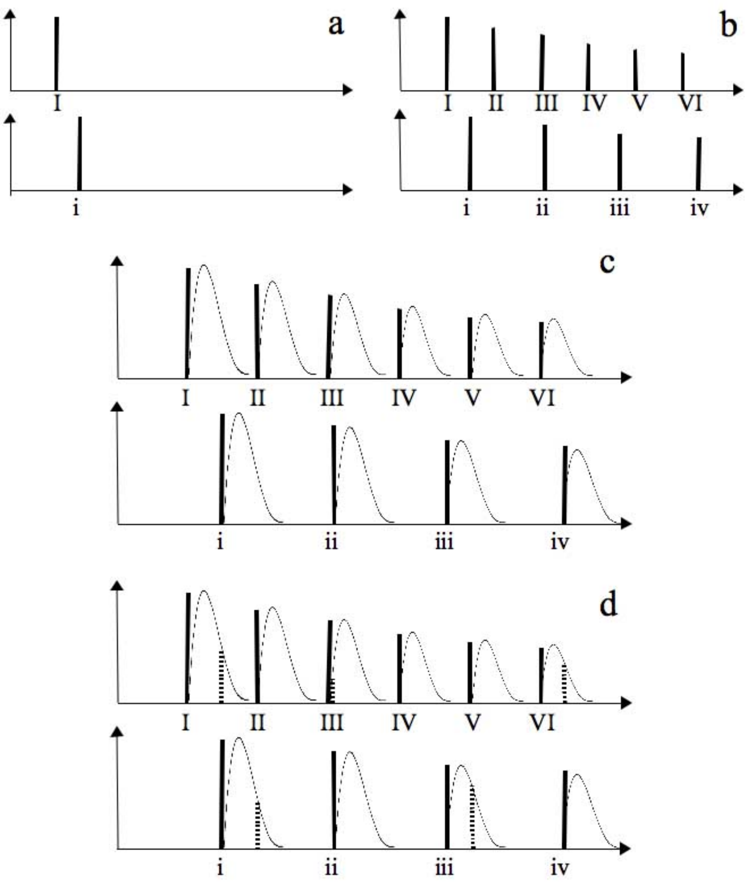
(1) 音を出せば自然と「倍音」も出て，音はフーリエ分解で正弦波に分解できる。

(2) 人間の耳は，入ってきた音を，それに含まれている振動数に分解するフーリエ分析器 (不完全だが) のような仕組みで聞き取っている。

(3) しかしその不完全さのため，振動数が近い 2 純音はうなりを生じたり，あらあらしい不快音になる。

以上は，倍音が生じていることを無視して，基本音 (正弦波) だけに関する考察であった。しかし，実際には何らかの倍音が必ず同時に鳴っているので，次にその辺りも含めて，2 音はどのようなときに協和し (心地よく響き合い)，どのようなときに協和しない (心地よく響き合わない) のかについて考えよう。具体的には，「2 音を重ねたとき，その 2 音の振動数の比が簡単なほど響きがよい」という，ピタゴラス学派のころから知られていた法則を検証してみる。

3 倍音を含む 2 音の協和性について



[5, p. 107] から引用

1. 左のグラフ **a** のように，2 音 I, i を同時に鳴らしたとしよう。

2. このとき，グラフ **b** のように倍音が鳴る。(それぞれ，どのような大きさ・位相で鳴るか分からないので，0.9 倍で音量 (振幅) が小さくなっていくとしよう。)

3. 基本音と倍音は，それぞれ，先ほど紹介した不協和度曲線をもつ。それを書き込んだのがグラフ **c** である。

4. このとき，グラフ **d** の太点線で表した部分が不協和を起こす。

よって，太点線の長さを全部足し合わせたものが，この 2 音の不協和量であると考えられる。

主要な振動数比の2音について，この視点から協和度を考察してみる。

(1) 振動数比が $1:2$，つまり「ある音」と「その1オクターブ上の音」の協和度を考察してみよう。話を簡単にするために，例えば 100 Hz と 200 Hz の2音で考えることにしてこれらの倍音を書き出してみると

100 Hz の基音と倍音：	100 Hz	200 Hz	300 Hz	400 Hz	500 Hz	···
200 Hz の基音と倍音：		200 Hz		400 Hz		···

となる。観察してみると，上の列の各音の不協和度曲線に，下の列のどの音も関係しない。さらに，逆もまたそうである。つまり，この2音が濁る原因は全くない。というか，そもそも 200 Hz の音の基音と倍音成分は 100 Hz の音の倍音成分の一部であり，100 Hz の音は 200 Hz の音を包み込んでいる音と捉えることができる。よって，この2音は同じ音名を付けてもいいほど同質の音であると言える。

(2) 振動数比が $2:3$，つまり「ある音」と「その完全5度上の音」の協和度を考察してみよう。話を簡単にするために，例えば 200 Hz と 300 Hz の2音の倍音の重なり具合を観察してみると

200 Hz の基音と倍音：	200		400	600	800		1,000	1,200	1,400		1,600	···
	ソ		ソ	レ	ソ		シ	レ	ファ		ソ	
300 Hz の基音と倍音：		300		600		900		1,200		1,500		···
		レ		レ		ラ		レ		ファ♯		

(**注．** 振動数の下に書かれている音名は，その振動数に最も近いものを選んだ。)

となる。200, 300, 400, 600 Hz 辺りはともかく，それより高い部分は全音，さらには半音の間隔になってきており，この辺りから音の濁りが生じる。ただし，比較的音量 (振幅) の小さい高倍音での濁りであるので，全体としての音の濁りは少ないと思われる。

(3) 振動数比が $3:4$，つまり「ある音」と「その完全4度上の音」の協和度を考察してみよう。話を簡単にするために，例えば 300 Hz と 400 Hz の2音の倍音の重なり具合を観察してみると

300 Hz の基音と倍音：	300		600		900	1,200	1,500		1,800		2,100	···
	レ		レ		ラ	レ	ファ♯		ラ		ド	···
400 Hz の基音と倍音：		400		800		1,200		1,600		2,000		···
		ソ		ソ		レ		ソ		シ		···

となる。800 Hz と 900 Hz の間は全音，1,500 Hz と 1,600 Hz の間は半音，1,600, 1,800, 2,000 Hz の間は全音，2,000 Hz と 2,100 Hz の間は半音の間隔になっており，$2:3$ より音の濁りが大きいことが分かる。

(4) 振動数比が $3:5$ (長6度)：

300 Hz の基音と倍音：	300		600	900		1,200	1,500	1,800		2,100	···
	レ		レ	ラ		レ	ファ♯	ラ		ド	···
500 Hz の基音と倍音：		500			1,000		1,500		2,000		···
		シ			シ		ファ♯		シ		···

900 Hz と 1,000 Hz の間が 全音，1,800 Hz と 2,000 Hz の間も 全音，2,000 Hz と 2,100 Hz の間が 半音 の間隔で，完全４度よりも濁りが少ないように思われる。

(5) 振動数比が 4 : 5（長３度）:

400 Hz の基音と倍音：	400	800	1,200	1,600	2,000	2,400	···
	ソ	ソ	レ	ソ	シ	レ	···
500 Hz の基音と倍音：	500	1,000	1,500	2,000	2,500		···
	シ	シ	ファ♯	シ	レ♯		···

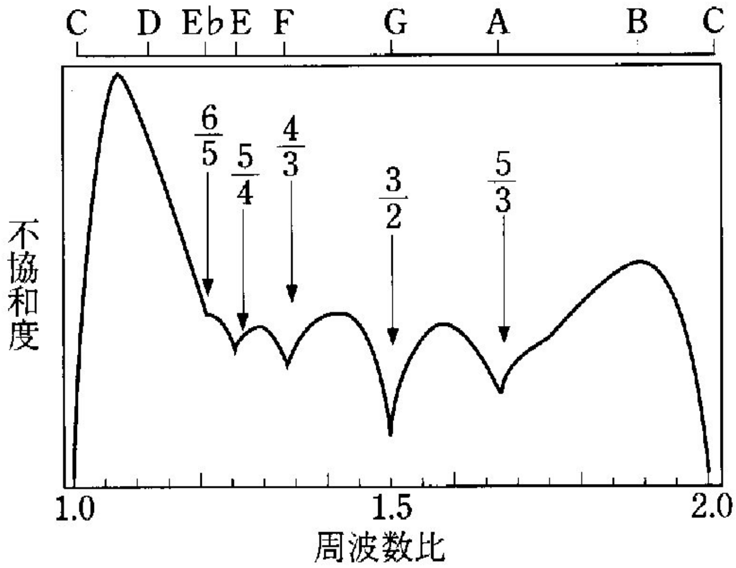
1,500 Hz と 1,600 Hz の間や，2,400 Hz と 2,500 Hz の間が 半音 なので，それなりに濁りはあると思われる。

(6) 振動数比が 5 : 6（短３度）:

500 Hz の基音と倍音：	500	1,000	1,500	2,000	2,500	3,000	···
	シ	シ	ファ♯	シ	レ♯	ファ♯	···
600 Hz の基音と倍音：	600	1,200	1,800	2,400	3,000		···
	レ	レ	ラ	レ	ファ♯		

1,800 Hz と 2,000 Hz の間が 全音，2,400 Hz と 2,500 Hz の間が 半音。長３度よりは濁りが少なそう。

この考え方によって，261 Hz の「ド」(C4) と，その振動数を t 倍 ($1 \leq t \leq 2$) した音との不協和度をグラフにしたものが次である。ただし，２倍音は基本音の 0.9 倍の振幅，３倍音は２倍音の 0.9 倍の振幅，４倍音は３倍音の 0.9 倍の振幅，··· とし，倍音は６倍音までという条件で計算されている。(もし７倍音以上も加味すると，協和点はさらに鋭ったものになる。)



[5, p. 107] から引用

この様な計算を最初に行ったのは Plomp, Levelt [21] であり，不協和度に加算性が成り立つと仮定して計算が行われている。講義の一番始めに見たグラフが，彼らが与えたものである。若干の差は，倍音の振幅等，計算条件の差によるものと思われる。最近では，インターネットで “Dissonance curve” で検索すると，いろいろな条件下で不協和曲線を描いてくれるサイトも見つけることができる。

それはともかく，この図から，振動数比が単純な２つの自然数で表される２音はよく協和し，その協和点を少しでも外れると急激に協和度が減少することが分かる。(このことは，ヴァイオリンを弾いたことがある人は調弦のたびに感じていたことであろう。ヴァイオリンは，隣合う２弦の音程が完全５度になるように調弦する。調弦法は，２本の弦を弓で同時に弾きながら糸巻きを回して行う。ピン・ポイントにすばらしく協和するところがあり，そここそが求めていた振動数比がちょうど $2:3$ になっている点である。) このように２音の振動数比が単純であるとき，その２音の和音は**純正**であると呼ばれる。そして，このピン・ポイントに音が協和する純正点（オクターブ $(1:2)$，完全５度 $(2:3)$，完全４度 $(3:4)$，長３度 $(4:5)$，長６度 $(4:6)$，短３度 $(5:6)$）を利用して，鍵盤楽器の調律が行われている。

「２音を重ねたとき，その２音の振動数の比が簡単なほど響きがよい」という法則は本当だったのである。

4 長音階・短音階の誕生とピタゴラス音律の改良が必要となった理由

さて，前回紹介した「ピタゴラス音律」であるが，完全５度，完全４度，長２度はピッタリ純正，そして短６度もほぼ純正に近い振動数比であるが，長３度が

$$2^6 : 3^4 = 64 : 81 = 1 : 1.265625$$

で，理想とされる

$$4 : 5 = 1 : 1.25$$

からは微妙にズレていて，とても緊張感のある固い感じの和音になる。そして，この長３度の不協和性が，何とピタゴラス音律のマイナーチェンジを促す決定的要因となった。しかし，<u>なぜ長３度がそんなに重要なのか？</u> それを次に説明しよう。

楽曲はその最後の音で「曲が終わった」と心の底から感じられることが，聞いた後の満足感を得るためにとても重要である。

中世の教会旋法では，各旋法の終止音が定められており，グレゴリア聖歌は，多くの曲でゆっくりと上下する旋律がしだいに下降してきて最後に終止音を長く伸ばすことで曲が終わったという終止感を得ていた。(つまり終わり方がパターン化されていた。) また，単一旋律であったグレゴリオ聖歌に別の声部（これは「オルガヌム声部」と呼ばれる）を加える試みは９世紀頃から始められたが，使われた和音はオクターブ，完全５度，完全４度のように「無個性」で「神秘的」で「ただただ美しい」性格のものであった。中世では，音楽とは合唱曲であり，最も重要であるのは鳴り響く音楽ではなく神を称える歌詞であり，「無個性」で「神秘的」で「ただただ美しい」響きが要求されていたのである。

その後，徐々に音楽自体にも目が向けられ，工夫が施されるようになり，終止法についても模索が行われた。例えば，ルネサンス前夜の 14 世紀には，完全５（４）度音程の２声部が同時に音を半音ズリ上げて終止する「二重導音終止」と呼ばれる終止法が盛んに用いられた。

続くルネサンス時代（音楽史上は 15 世紀～16 世紀）には和声音楽が発展し，15 世紀の 1430 年代，**３和音**と呼ばれる，完全５度音程の２音（低い方の音は**根音**と呼ばれる）に，根音の長３度上または短３度上の音を付け加えた和音を用いて，強い終止感をもつ終止法が発見された。長３度上の音を付け加えた３和音（例えば「ド・ミ・ソ」，「ファ・ラ・ド」，「ソ・シ・レ」）は**長３和音**と呼ばれ，短３度上の音を付け加えた３和音（例えば「ラ・ド・ミ」，「レ・ファ・ラ」，「ミ・ソ・シ」）は**短３和音**と呼ばれる。（ちなみに，３和音において，付け加えた音を**第３音**（根音から３度上の音であるので），根音の完全５度上の音を**第５音**と呼ぶ。）

具体的には，次の和音を用いて終止感を作り上げる。

- **主和音（トニック（コード））**：音階の主音（トニック）を和音の根音とする３和音のこと。（「ド」を主音とする長音階では「ド・ミ・ソ」，「ラ」を主音とする短音階では「ラ・ド・ミ」。）これを **I** と表す。
- **属和音（ドミナント（コード））**：音階の属音（ドミナント）（根音の完全５度上の音。名称は，主音とともにメロディやハーモニーを支配する（dominate）ことに由来する）を和音の根音とする３和音のこと。（「ド」を主音とする長音階では「ソ・シ・レ」，「ラ」を主音とする和声的短音階（後述）では「ミ・ソ♯・シ」。）これを **V** と表す。（属音が音階の５番目の音なので。）
- **下属和音（サブ・ドミナント（コード））**：音階の下属音（サブ・ドミナント）（つまり主音の完全４度上の音）を和音の根音とする３和音のこと。（「ド」を主音とする長音階では「ファ・ラ・ド」，「ラ」を主音とする和声的短音階では「レ・ファ・ラ」。）これを **IV** と表す。（下属音が音階の４番目の音なので。）

以上の３つを**主要３和音**と呼ぶ。そして，これらに加えて，次の４和音も用いられる。

- **属７和音（ドミナント・セブンス（コード））**：属和音に，根音の短７度（半音 10 個分）上の音（**第７音**と呼ばれる）も加えた４つの音の和音。（「ド」を主音とする長音階では「ソ・シ・レ・ファ」，「ラ」を主音とする和声的短音階では「ミ・ソ♯・シ・レ」。）これを $\mathbf{V}_7$ と表す。

さて，発見された強い終止感をもつ終止法とは，次のようなものである。

(I) **属（７）和音から主和音への進行・解決するという終止法**：主和音は，安定した気持ちがする和音である。これが属（７）和音に進むと途端に不安定な緊張した表情を見せ，属和音は主和音に戻ろうとする。

注．属和音の第３音は，（１オクターブを無視すると）主音の半音下であり主音への導音として主音に進行する強い力をもっている。属和音の第５音は，主音の長２度上であり主

音に回帰する力をもち，さらに主和音の第３音の長２度もしくは短２度下であるため第３音に進行する力ももっている。また，属音それ自体も，属音の３倍音が属和音の第５音と，属音の５倍音が属和音の第３音と同じであるため，単体でも主和音に戻ろうとする力をもっている。

また，属７和音は第３音と第７音の音程が減５度 (不協和) であり，属和音よりさらに緊張度は高く，さらに第７音は主和音が長３和音のとき，その第３音の半音上であり，この音に進行しようとする。

つまり，

主和音	→	属 (7) 和音	→	主和音
安定	→	不安定緊張	→	安定

という流れを示している。

(II) **下属和音から属 (7) 和音を経て主和音に至る終止法**：下属和音も属和音に似て不安定な表情をもっているが，主和音を広げてきたという性格をもち，主和音に戻ろうとする力は弱い。しかし，これが属 (7) 和音につながると，下属和音の不安定感が属 (7) 和音の不安感を強調する感じを受ける。その分，到達先の主和音の安定感がより強調され終止感は高まる。つまり，

主和音	→	下属和音	→	属 (7) 和音	→	主和音
安定	→	不安定	→	不安定・緊張増大	→	安定

という流れを示している。

(III) **下属和音から主和音に進行する終止法**：上記の２つのような強い終止感を伴った終止法ではないが，やわらかな終止感をもち，賛美歌によく使われることから「アーメン終止」という名称で知られている。

実は，(I), (II), (III) のような和音進行は，曲の終わりだけではなく曲中においても，まるで文章がたくさんの文で成り立っているように，曲中の和音進行の最小単位として繰り返し用いられるようになった。この最小単位は **カデンツ** と呼ばれる。そして，和音がこのように使われるとき，その和音進行システムを **機能和声** と呼ぶ。

ルネサンス時代とは，グレゴリオ聖歌のような単旋律の音楽に他の旋律を重ね合わせるようになったという歴史の流れから自然と生じていた，「和音とは複数の旋律がたまたま作り出すもの」という見方を改めて，和音の進行で音楽を創り出すという考え方が生まれた時代であった。そして，このような和音進行法が探求がされる中で，臨時記号 (♯, ♭) が盛んに用いられるようになり (オルガンの鍵盤に半音のキー (現代の黒鍵) が入り始めたのは 13 世紀である [2, p. 34])，ドリア旋法・リディア旋法・ミクソリディア旋法が変形してイオニア旋法・エオリア旋法になった。この２つの旋法は，他の教会旋法より遅れて，1525 年になってやっと教会により「公式旋法」と認められている。そして，カデンツを使った和音進行を行うとき，この２つの旋法はそれぞれ**長音階・短音階**と呼ばれるようになった。このような歴史の流れの中，それまで使われていた教会旋法

は，だんだんと長音階・短音階に取って代わられて行き，17 世紀の終わり頃には，ほとんどの楽曲は長音階・短音階で作曲され，その直前まで隆盛を誇っていた教会旋法は忘れ去れていった。それは，大バッハ (1685 年 〜 1750 年) が機能和声を駆使して大量の作品を生み出すほんの少し前のことである。17 世紀の終わり頃 (バロック後期) から 19 世紀の終わり頃までの 200 年間，この 2 つの音階が支配する時代が続くことになる。

注 1. 16, 17 世紀は中世同様，数比が重要視されていた時代であった。長 3 和音は 3 つの音の振動数比が $3:4:5$ のとき，これを構成するどの 2 音も純正であるため，**純正**であると呼ばれる。この単純で美しい 3 音の数比は，神によって作られた完全なる秩序を示し，三位一体の音楽的象徴とされ，それ故，長 3 和音は最も高貴な快い響きと認められた。

これに対し，短 3 和音は $10:12:15$ のとき，これを構成するどの 2 音も純正であるため，**純正**であると呼ばれるが，その悪い振動数比のため，価値が低く，軟弱とされた。(ジョゼッフォ・ツァルリーノ (1517 年 〜 1590 年 : 16 世紀イタリアの音楽理論家・ヴェネツィア楽派の作曲家) は短 3 和音を “affetto tristo” (悪い感情・悪意のある感情) と呼んでいる。) [1, p. 100] このため，短 3 和音で曲を閉じることは好まれなかった。(「カオスで曲を閉じることはできない。」[1, p. 100]) そして，多くの短調の曲は最後の和音で長調に転調して終わることになる。(この終止の仕方は「**ピカルディ終止**」と呼ばれる。) もし，短 3 和音で曲が閉じられていた場合 (例えば，バッハの「マタイ受難曲」)，そこには特別な意図があった，とも言われている。

注 2. 長音階は主要 3 和音がすべて価値の高いとされる長 3 和音である。それに対し短音階の主要 3 和音はすべて価値の低いとされる短 3 和音である。それだけではなく，短音階は長音階のように完成度の高い音階ではないと考えられることもある。ニコラウス・アーノンクール (オーストリアの指揮者・音楽学者) は [1, p. 104] で述べている。「17 世紀の終わりになると，ついにはあらゆる教会旋法のなかから長音階のみが残った。」

短音階は，原型であるエオリア旋法だけではその特性を生かすことが出来ず，原型を少し変形した 2 種類を加えた計 3 種類が，エオリア旋法の頃から 1 曲の中で同時に使われてきた。エオリア旋法と同じものは **自然短音階** と呼ばれる。機能和声を用いるときは，第 7 音 (主音「ラ」から 7 番目の音)「ソ」を半音上げる変更を行った **和声的短音階** が使われる。この変更により属和音は長 3 和音になる。属和音として短 3 和音を使っても終止感は得られるが，長 3 和音に変更するとより強い終止感が得られる。一方，旋律を歌うときを考えると，和声的短音階は，第 7 音が半音上げられたため，音階を下から上に歌ったとき，第 7 音「ソ」と音階のゴールである第 8 音「ラ」(主音) との音程が半音となり「歌い終わり感」が出たが (第 7 音は，主音である第 8 音を導く音という性格をもつため「導音」と呼ばれる。第 7 音と第 8 音の音程が半音であると，その役割が十分に発揮される)，反面第 6 音と第 7 音の間が増 2 度 (半音 3 つ分) となってしまったため，その部分が歌いにくい。これを改善するため，さらに第 6 音も半音上げる変更が考え出された。この音階は上昇する旋律にはぴったりであっ

たため，音階の上昇型には２ヶ所変更されたものが用いられることになった。しかし，上から下がってくるときは第６音と第７音が半音上がっていなくても歌いにくくないし，原型である自然短音階は下降する旋律にはぴったりであったため，音階の下降型には自然短音階が用いられることになった。この上昇型と下降型が異なる音階は**旋律的短音階**と名付けられている。作曲家は，これら３種類の短音階を自由に使って音楽を作り出している。

注 3. 中世によく使われた「ド・ソ」の完全５度の和音（「無個性」で「神秘的」で「ただただ美しい」）に対し，「ド・ミ・ソ」の長３和音は意思を感じる明るく力強い性格の和音であり，「ラ・ド・ミ」（「ド・ミ♭・ソ」）の短３和音は暗く悲しい性格の和音と言われている。（「ド・ソ」の和音は現在「空５度」と呼ばれ，その明るいのか暗いのかハッキリしないその無個性さを活用して楽曲で用いられている。例えば，ベートーヴェンの第９交響曲の第１楽章は，ホルン・第２ヴァイオリン・チェロがそれぞれ「ラ・ミ」の「空５度」を出すことで開始される。ここでは，「空５度」が混沌を感じさせる役割を担っている。）

では，今述べた終止法を実際に聴いてみよう。

（カワイ・スコアメーカーを用いて，下記の楽譜通りの音を体験してみる。）

短　調

さらに，実例としてベートーヴェンの第 7 交響曲の第 4 楽章（最近映画にもなった「のだめカンタービレ」で取り上げられていた曲で，曲を知っている学生が多いと思われる）の最後の 15 小節（下の楽譜は最後の 9 小節）

と，モーツァルトの「レクイエム」から「ラクリモーサ」の最後の 11 小節（次のページの楽譜は最後の 4 小節）

を聴いてみよう。(ベートーヴェンは クライバー指揮のウィーン・フィルハーモニー管弦楽団，モーツァルトは ムーティ指揮のベルリン・フィルハーモニー管弦楽団，スウェーデン放送合唱団の CD を用いた。) ベートーヴェンは属 7 和音が 4 小節半に渡って鳴り続けた後，最後の 3 小節間に主和音が 3 回繰り返されて曲を閉じる。また，モーツァルトは，長 3 和音の属和音から短 3 和音の主和音で一区切りを付けた後，短 3 和音の下属和音から，長調に転調し長 3 和音の主和音で曲を閉じる。ピカルディ終止のアーメン終止の例である。

注. モーツァルトは，「ラクリモーサ」の冒頭 8 小節のスケッチを書いたところで没している。「レクイエム」は，弟子のジェスマイヤーが完成させた。今回聴いた「ラクリモーサ」の終結部は，完全にジェスマイヤー作曲の部分である。

それはともかく，すでに述べたように，ピタゴラス音律は，「ド・ミ・ソ」の長 3 和音の「ド」と「ミ」の音程 (長 3 度) がきれいに響かない。つまり，せっかく最も価値の高いとされた長 3 和音による強い終止感をもった終止法が見つかったのに，(ドミナント・セブンスのように，不安定・緊張感という性格をもつドミナントが少々濁るのはいいとしても) 大円団を迎えるはずの最後の和音が緊張感のある和音では台無し。と言う訳で，ピタゴラス音律の改良が行われることになった。

この講義の後半に，その後どのような音律が作られ (16〜19 世紀に大量の音律が作られた)，そしてメルセンヌが 17 世紀に確立していた 12 平均律音律が 19 世紀後半以降に音律の主役に躍り出るまでの，ヨーロッパ中の名の通った数学者・物理学者が参戦していた音律をめぐる「数」との戦いについて解説しよう。[12]

謝辞.

声楽家の真木喜規氏にはこの論文を通読頂き，アドバイスを頂きました。また，九州大学芸術工学研究院の岩宮眞一郎教授には，臨界帯域等についてアドバイスを頂きました。さらに，茨城大学理学部の中井英一教授には，フーリエ級数に関するアドバイスを頂きました。感謝致します。

参考資料

[1] ニコラウス・アーノンクール，古楽とは何か，1997，音楽之友社

[2] オリヴィエ・アラン，和声の歴史，1969，白水社

[3] 岩宮眞一郎，ＣＤでわかる 音楽の科学，2009，ナツメ社

[4] アレクサンダー・ウッド，J.M.バウシャー改訂，石井信生訳，音楽の物理学，1976，音楽之友社

[5] 小方厚，音律と音階の科学，2007，講談社

[6] 黒沢隆朝，楽典 (三訂)，1979，音楽之友社

[7] 田辺尚雄，音楽音響学，1951，音楽之友社

[8] 田村和紀夫，新 名曲が語る音楽史，2008，音楽の友社

[9] 田村和紀夫, 鳴海史生，音楽史 17 の視座，2008，音楽の友社

[10] ジョン・パウエル，小野木明恵訳，響きの科学，2011，早川書房

[11] 馬場良始，ピタゴラス音律 –小学校専門科目「数学」での実践–，数学教育研究 41 (2012), 71–94.

[12] 馬場良始，音律の探求 (16 世紀以降)–小学校専門科目「数学」での実践–，数学教育研究 42 (2013), 61–85.

[13] 久野みゆき, 安藤啓司, 杉原泉, 秋田恵一，人体の正常構造と機能 IX 神経系 (2)，2005，日本医事新報社

[14] 平島達司，ゼロ・ビートの再発見，2004，ショパン

[15] 平島達司，ゼロ・ビートの再発見 技法篇，2004，ショパン

[16] ホアン G. ローダラー，高野光司，安藤四一 (共訳)，音楽の科学，1981，音楽の友社

[17] Juan G. Roederer，The physics and psychophysics of music: An introduction (Fourth edition)，2008，Springer

[18] L. van Beethoven，Symphonies Nos. 5, 6 and 7 in full score，1989，Dover publications

[19] James Jeans，Science and Music，2009，Cambridge University Press

[20] Mozart，Requiem (vocal score)，1965，Bärenreiter-Verlag

[21] R. Plomp and W. J. M. Levelt, Tonal Consonance and Critical Bandwidth, J. Acoustic. Soc. Am. 38 (1965), 548–560.

[22] R. Plomp，Aspects of Tone Sensation, 1976，Academic press

[23] W. A. Wethares, Tuning, Timbre, Spectrum, Scale (second edition), 2010, Springer-Verlag

[24] E. Zwicker, G. Flottorp and S. S. Stevens, Critical Band Width in Loudness Summation, J. Acoust. Soc. Am. 29 (1957), 548–557.