音律の探求 (16 世紀以降)

— 小学校専門科目「数学」での実践 —

馬 場 良 始

（大阪教育大学 数学教育講座）

（ 平成 25 年 3 月 31 日受付 ）

概要： 2011 年度に続き 2012 年度にも，小学校専門科目「数学」の授業で「ピタゴラス音律」と「平均律音律」を取りあげ，数学者がどのように「音楽」分野の基礎作りを行ったかを講義した。昨年は，全 2 回の講義の 1 回目「ピタゴラス音律」についての講義報告 [22] を行った。この論文では，2 回目「平均律音律」に関する 1 時間半の講義の後半の内容を，前半の内容を紹介した [23] の続きとして，小学校専門科目の授業としてはやや専門性が高いため述べなかった部分を補足しながら解説する。実際の講義で述べたのは，ピタゴラス音律から純正律，中全音律，ウェル・テンペラメント，12 平均律音律への歴史的な移り変わりと，中全音律で相乗平均が使われていること，そして 12 平均律音律の定義の部分である。この論文では，補足として講義で解説した部分の背景を述べることができたため，16 世紀から 19 世紀にかけてヨーロッパ中の名の通った数学者・物理学者がその解決法に没頭していたこの歴史的音律問題を，より身近に感じて頂けるものと思う。最後に講義に対する受講生の反応も紹介する。

検索語： 純正律，中全音律，ウェル・テンペラメント，ヴェルクマイスター調律，キルンベルガー調律，12 平均律音律

I. 始めに

ピタゴラス音律は，古代ギリシャの数学者であるピタゴラス (紀元前 580 年頃 ～ 紀元前 500 年頃) の学派によって，史上初の音律として生み出された。そして，少なくとも 16 世紀頃までは，最もポピュラーな音律として使われ続けたが，その長 3 度の和音の不協和性のために改良の必要が生じたことを [23] で述べた。「平均律音律」と題したこの講義の後半では，ピタゴラス音律に代わるものとしてどのような音律が考案され，どのような理由で結局は 19 世紀の後半以降，17 世紀にマラン・メルセンヌが確立していた 12 平均律音律が主に使われるようになったのかを説明する。ヨーロッパ中の名の通った数学者・物理学者がその解決法に没頭していたこの大問題 [8, p. 268] は，いまでも我々に大きな知的刺激を与えてくれる。

II. 準備　(純正・音のものさし「セント」・音程に関する計算上の注意・5 度圏)

● 純正

[23, pp. 38, 51] で見たように，2 音の振動数比が，

$$1:2\ (\text{オクターブ}),\quad 2:3\ (\text{完全５度}),\quad 3:4\ (\text{完全４度})$$
$$4:5\ (\text{長３度}),\quad 5:6\ (\text{短３度}),\quad 4:6\ (\text{長６度}),\quad 5:8\ (\text{短６度})$$

であるとき，それらは心地よく協和し，その一点を少しでも外れると協和性は直ちに悪化した。(短６度については明確な一点が表れていないが。) このような振動数比の２音は**純正**であると呼ばれ，協和する一点を**純正点**と呼ぶ。この純正点を利用して，鍵盤楽器の調律が行われる。

また，長３和音は構成する各音の振動数比が $4:5:6$ のときに，短３和音は $10:12:15$（つまり，$5:6$, $4:5$, $2:3$ の組み合わせ）のときに**純正**であると呼ばれる。

● 音のものさし「セント」

講義では扱わなかったが，ジョン＝アレクサンダー・エリス（1814 年 ～ 1890 年：イギリスの音響学者）が提唱した「セント」(cent) という単位は，わずかな音の差を測るものさしとして非常に有用である。[22, pp. 86–87] でも紹介したが，読者の便宜を図ってもう一度説明しておこう。

最初に，１オクターブの音程を 1200 セントと定める。つまり，１オクターブという幅 (大きさ) を「1200 セント」という値で表すことにする。そして，P という音の振動数が，Q という音の振動数の x 倍（ただし $x \geq 1$，つまり P は Q より音高が高いか同じとする）であるとき，それらの音程のセント値を，2 を底とする対数関数（高校の「数学 II」）を用いて

$$1200 \log_2 x$$

と定める。

12 平均律音律では，どの半音間の振動数の比率も $1:2^{\frac{1}{12}}$ であるので（12 平均律音律の定義は後で行う），それらの音程は

$$1200 \log_2 2^{\frac{1}{12}} = 1200 \times \frac{1}{12} = 100\ \ (\text{セント})$$

つまり，「ド」と次の各音との音程のセント値は

ド	ド♯	レ	レ♯	ミ	ファ	ファ♯	ソ	ソ♯	ラ	ラ♯	シ	ド
0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200

となり，平均律音律が１オクターブをキッチリ 12 等分していることがハッキリ分かる。

ついでに，純正な音程のセント値も計算しておくと，完全５度（例えば，「ド–ソ」）が $1200 \log_2 \frac{3}{2} \fallingdotseq 701.96$ セント，完全４度（例えば，「ド–ファ」）が $1200 \log_2 \frac{4}{3} \fallingdotseq 498.04$ セント，長３度（例えば，「ド–ミ」）が $1200 \log_2 \frac{5}{4} \fallingdotseq 386.31$ セント，短３度（例えば，「ド–ミ♭」）が $1200 \log_2 \frac{6}{5} \fallingdotseq 315.64$ セント，長６度（例えば，「ド–ラ」）が $1200 \log_2 \frac{5}{3} \fallingdotseq 884.36$ セント，短６度（例えば，「ド–ラ♭」）が $1200 \log_2 \frac{8}{5} \fallingdotseq 813.69$ セントとなる。（このことから，12 平均律音律の完全５度・完全４度は純正に近く比較的協和するが，長３度・短３度・長６度・短６度はいずれも純正と 10 セント以上の差がありかなり不協和であることが見て取れる。）

● 音程に関する計算上の注意

３つの音 P, Q, R があったとする。それぞれの振動数を p, q, r と表し，$p < q < r$ と考えよう。また，$a, b, c, d, a', b', c', d'$ を正の実数とする。

(1) Q は P の振動数の a 倍の振動数の音（つまり，P と Q の振動数比は $1:a$）だとすると $q=ap$ が成り立っている。さらに，R は Q の振動数の b 倍の振動数の音（つまり，Q と R の振動数比は $1:b$）だとすると $r=bq$ が成り立っている。このとき $r=abp$（つまり，P と R の振動数比は $1:ab$）が成り立っている。このように，ある音に対し，その上の音を，さらに上の音を，と取っていくとき，最後の音の振動数は，最初の音の振動数に，途中の過程での振動数比が与える倍数をすべて掛けていくことで計算できる。

また，R は P の振動数の c 倍の振動数の音（つまり，P と R の振動数比は $1:c$）で，R は Q の振動数の d 倍の振動数の音（つまり，Q と R の振動数比は $1:d$）のとき，Q は P の振動数の $\frac{c}{d}$ 倍の振動数の音（つまり，P と Q の振動数比は $1:\frac{c}{d}$）になる。

同様に，R は P の振動数の c 倍の振動数の音で，Q は P の振動数の d 倍の振動数の音であるとき，R は Q の振動数の $\frac{c}{d}$ 倍の振動数の音になる。

以上のことを例で確かめてみよう。「ド」の純正５度上の「ソ」の振動数は「ド」の振動数の $\frac{3}{2}$ 倍。「ソ」の純正４度上の「ド」(これを「上のド」と呼ぼう) の振動数は「ソ」の振動数の $\frac{4}{3}$ 倍。よって「上のド」の振動数は「ド」の振動数の $\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{4}{2}=2$ 倍。逆に，「上のド」は「ド」の 1 オクターブ上であるので，「上のド」の振動数は「ド」の振動数の 2 倍である。「ド–ソ」が純正であるとき，「ソ」の振動数は「ド」の振動数の $\frac{3}{2}$ 倍であるので，「上のド」の振動数は「ソ」の振動数の $\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$ 倍である。また，「ソ–上のド」が純正であるとき，「上のド」の振動数は「ソ」の $\frac{4}{3}$ 倍であるので，「ソ」の振動数は「ド」の振動数の $\frac{2}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{2}$ 倍であることが分かる。

以上は振動数に関しての注意であったが，P, Q, R の音程をセントを表すとき，振動数の計算での乗法・除法は加法・減法に変わる。(セントは対数を用いて定義されているので，高校の「数学 II」の知識より明らか。) よって，P と Q の音程が a' セント，Q と R の音程が b' セントであれば，P と R の音程は $a'+b'$ セントであり，P と R の音程が c' セント，Q と R (または，P と Q) の音程が d' セントであれば，P と Q (または，Q と R) の音程は $c'-d'$ セントとなる。

(2) もし Q が P の 1 オクターブ高い音，そして R が Q の 1 オクターブ高い音とするとき，$q=2p$ と $r=2q$ が成り立つ。もちろんこのとき，Q は P と R のちょうど中間の音高とみなしてよいことは誰も異論を唱えないであろう。p, q, r の関係を整理してみると，隣合う数の比が等しい，つまり

$$p:q=1:2=q:r$$

と特徴付けることができる。これを一般化して，任意の 3 つの音 P, Q, R に対しても，もし

$$p:q=q:r$$

が成り立っていれば，Q は P と R の**ちょうど中間の音**であると定義しよう。Q が P と R のちょうど中間の音であるとき，比の式を解くと

$$q=\sqrt{pr} \qquad \text{（つまり，}q\text{ は }p\text{ と }r\text{ の\textbf{相乗平均}（高校の「数学 II」））}$$

となる。これは，ある音からの 2 つの振動数比 $s_1:t_1$, $s_2:t_2$ のちょうど中間の振動数比 $s:t$ を求めることにも応用できる。$i=1,2$ に対して，音 S (その振動数を s とする) と

音 T_i の振動数比が $s_i : t_i$ であるとき，T_i の振動数は $\frac{t_i}{s_i}s$ であるから，T_1 と T_2 のちょうど中間の音は，上の結果から振動数が

$$\sqrt{\left(\frac{t_1}{s_1}s\right)\left(\frac{t_2}{s_2}s\right)} = \frac{\sqrt{t_1 t_2}}{\sqrt{s_1 s_2}}s$$

の音であるので，S との振動数比は

$$s : \frac{\sqrt{t_1 t_2}}{\sqrt{s_1 s_2}}s = 1 : \frac{\sqrt{t_1 t_2}}{\sqrt{s_1 s_2}} = \sqrt{s_1 s_2} : \sqrt{t_1 t_2}$$

この考え方を拡張すると，任意の自然数 n に対し，$n+1$ 個の音 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_{n+1}$（それぞれの振動数を $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ （$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n+1}$）とする）があるとき，これらの音が**等間隔**である（つまり，A_1 と A_{n+1} の間は $\mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ で n **等分**されている）とは，

$$a_1 : a_2 = a_2 : a_3 = a_3 : a_4 = \cdots\cdots = a_n : a_{n+1}$$

が成り立っているときであると定義できる。またこのとき，$\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_{n+1}$ の隣同士の振動数比は，両端の音の振動数 a_1，a_{n+1} を用いて

$$a_i : a_{i+1} = 1 : \left(\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

と表される。実際 (1) より，次々に上の音を取っていく場合，最初の音から最後の音までの振動数比は，振動数比から得られる分数（高校の「数学 II」で学ぶ「比の値」の逆数）をどんどん掛けていって得られるので，指数法則（高校の「数学 II」）を使って

$$a_1\left(\left(\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n = a_1\left(\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}n} = a_1\left(\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)^1 = a_1\frac{a_{n+1}}{a_1} = a_{n+1}$$

となり，このことが正しいと分かる。もちろん，これを使うと，振動数比が $s : t$ （$s < t$）である 2 つの数 P, Q の間を n 等分したとき，隣同士の振動数比が

$$1 : \left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{1}{n}}$$

であることも分かる。

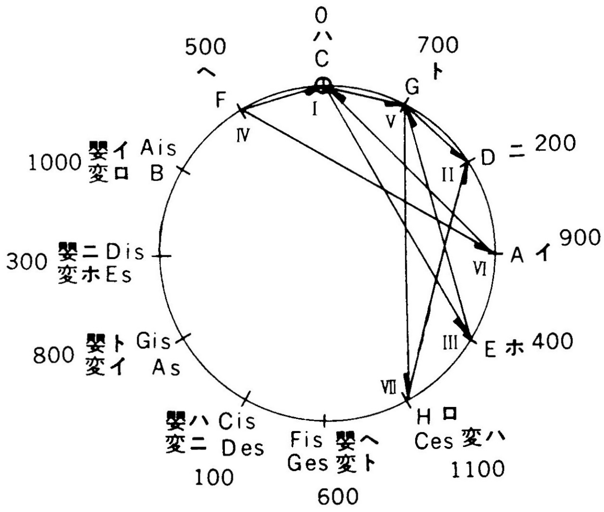
以上は振動数に関する注意であったが，セントで考えると，もし Q が P と R のちょうど中間の音で，P と R の音程が a' セントであれば，P と Q の音程も，Q と R の音程もともに $\frac{a'}{2}$ となる。（つまり，セントで考えると**相加平均**になる。）これを拡張すると，$n+1$ 個の音 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_{n+1}$ が等間隔のとき，A_1 と A_{n+1} の音程が b' セントであれば，すべての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対し，A_i と A_{i+1} の音程が $\frac{b'}{n}$ セントになることは言うまでもない。

• 5 度圏

音律について考えるとき，**5 度圏**（または **5 度円**）と呼ばれる，完全 5 度音程の音の列（ピタゴラス音律が作られた順），つまり

$\cdots$ −ソ♭−レ♭−ラ♭−ミ♭−シ♭−ファ−ド−ソ−レ−ラ−ミ−シ−ファ♯−ド♯−ソ♯−レ♯−ラ♯− $\cdots$

を，円周上に時計回りに配置した次のページの図のようなものがよく使われる。



[25, p. 68] から引用。

注 1. ド, レ, ミ, ファ, ソ, ラ, シ, ド はイタリア語の音名である。日本語では ハ, ニ, ホ, ヘ, ト, イ, ロ, ハ であり, ♯ の付いたものは前に「嬰」を, ♭ の付いたものは前に「変」をつける。また, ドイツ語表記では C, D, E, F, G, A, H, C となり, シ♭は B で（英語表記では「シ」が B であり, 「シ♭」は B♭となる）, それ以外は ♯ が付けば -is を, ♭ が付けば -(e)s を付ける。

注 2. 左図は 12 平均律音律の５度圏を表している。音名が日本語とドイツ語で, そしてセント値も記入されている。平均律音律は異名同音（つまり, 例えば「ド♯」と「レ♭」は同じ音高）であるので, 同音高となる２つの音名が上下に並べて記されている。

注 3. ５度圏から長３度と短３度も読み取れる。矢印の付いた弦が２種類記入されているが, 矢印の付いた長い弦は右回りに４つ進めの意味で, これが長３度（例えば,「ファ」(F) から「ラ」(A) への矢印つき弦）であることを, そして矢印の付いた短い弦は左回りに３つ進めの意味で, これが短３度（例えば,「ラ」(A) から「ド」(C) への矢印つき弦）であることを示している。

実際に, – で示された完全５度の音程を決定すれば音律が定まることは, ピタゴラス音律がそのように作られたことから分かる。５度圏 1 周分の 12 個の完全５度をすべて積み上げて行くと, その音程はちょうど７オクターブであるので（実際, 国際式の音名表記を使うと, もし最初の「ド」が C0 であれば,

$$\mathrm{C0} - \mathrm{G0} - \mathrm{D1} - \mathrm{A1} - \mathrm{E2} - \mathrm{B2} - \mathrm{F}\sharp 3 = \mathrm{G}\flat 3 - \mathrm{D}\flat 4 - \mathrm{A}\flat 4 - \mathrm{E}\flat 5 - \mathrm{B}\flat 5 - \mathrm{F6} - \mathrm{C7}$$

となり, ちょうど７オクターブである）, 振動数比はもちろん

$$1 : 2^7 = 1 : 128$$

になる。もしこれら 12 個の完全５度をすべて純正に取り積み上げて行くと, その音程は

$$1 : \left(\frac{3}{2}\right)^{12} \fallingdotseq 1 : 129.75$$

となり, ７オクターブより少しだけ広い音程になってしまう。どれだけ広くなっているかをセントで表すと,

$$1200 \log_2 \left(\tfrac{3}{2}\right)^{12} - 1200 \times 7 = 1200 \times 12 \times (\log_2 3 - \log_2 2) - 1200 \times 7 \fallingdotseq 23.46 \text{ セント}$$

これを**ピタゴラスのコンマ**と呼んだ。（「コンマ」はギリシャ語の「断片」, つまり「小音程」の意味。）よって, もし 12 個の完全５度すべてを純正で取ろうとすると, 最初の「ド」より 12 番目の「ド」の音高が高くなってしまう。（ぴったり一致しないことを「**５度圏は閉じない**」とよぶ。）そのため, 鍵盤楽器をピタゴラス音律で調律する場合, 純正な 1 オクターブに 12 個の音をはめ込むため, 12 個ある完全５度のうちの 1 つを純正より約 23.46 セント狭く調律して辻褄を合わせる。（これで「**５度圏は閉じた**」ことになる。ちなみに, 12 平均律音律では半音が 100 セントであったので, 23.46 セントは約 $\frac{1}{4}$ 半音であり, 辻褄合わせのために狭くなった完全５度はかなり狭いものである。）このかなり狭い完全５度をどこに設定するかということや, ピタゴラスのコンマがもたらす「異名異音」については, 後に鍵盤楽器の調律について述べるときに, 詳しく説明しよう。

III. 純正律（美しい和音重視の音律）

和音が協和するよう，単純比率を最優先して音を配置していった音律である。このアイディアは，クラウディオス・プトレマイオス（83 年頃～168 年頃：古代ローマの数学者・天文学者・音楽理論家）が，ギリシャ時代の音律について書いた音楽理論書にすでに見られる。[25, p. 108] この本には，ギリシャ時代の音律がたくさん載せられているが，実用性を重んじるローマ時代に，ピタゴラス音律以外の音律は忘れ去られてしまった。その後，バルトロメ・ラミス（1440 年頃～1491 年頃：スペインの作曲家・音楽理論家）が 1482 年に発表した「実践音楽」に，再び純正律を意識した音律が表れる。[25, p. 112] この音律が純正律の基礎原理となった。このラミスの本以降，急速に３度音程が重要視されるようになり（それまでは，３度音程が不協和なピタゴラス音律が用いれていた），ラミスの音律がヒントとなって，後で紹介する「中全音律」が 1523 年にいきなりピエトロ・アーロン（1480 年～1545 年：イタリアの作曲家・音楽理論家。フィレンツェ出身）によって提唱された。その後，1529 年にフォリアーノによって純正律の半音階的半音が確立される。残響の多い教会で，たとえ単旋律の合唱であっても，前の音が残っている間に３度・４度・５度を取るので自然と純正律で歌っていたと考えられるが，およそ 15 世紀から 16 世紀にかけて鍵盤楽器の発展とともに，その純正律を厳密に記述する試みがなされ，このような成果が現れたと見られる。純正律と中全音律は，歴史的には入り混じって試みられていたのである。

純正律の長音階の各音の振動数比は，完全５度（2 : 3）と長３度（4 : 5）を使って次のように求められる。「ド」の振動数を，比を求めるために仮に 1 とするとき，「ミ」と「ソ」はもちろん $\frac{5}{4}$ と $\frac{3}{2}$。「ファ」は「ド」の完全５度下（の１オクターブ上）なので $(1 \div \frac{3}{2}) \times 2 = \frac{4}{3}$。「レ」は「ソ」の完全５度上なので $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$。「ラ」と「シ」はそれぞれ「ファ」と「ソ」の長３度上なので $\frac{4}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$ と $\frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$。表にまとめると，「ド」の音を基準としたときの，各音の振動数比とセント値の概数は次の通りである。

ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
0	204	386	498	702	884	1088	1200

一方，短音階の各音の振動数比は，完全５度（2 : 3）と短３度（5 : 6）を使って次のように求められる。「ド」の振動数を，比を求めるために仮に 1 とするとき，「ミ♭」と「ソ」はもちろん $\frac{6}{5}$ と $\frac{3}{2}$ で，完全５度だけを使って得られる「レ」と「ファ」は長音階と同じ。残りの「ラ♭」と「シ♭」は，それぞれ「ファ」と「ソ」の短３度上なので $\frac{4}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{8}{5}$ と $\frac{3}{2} \times \frac{6}{5} = \frac{9}{5}$。表にまとめると，「ド」の音を基準としたときの，各音の振動数比とセント値の概数は次の通りである。

ド	レ	ミ♭	ファ	ソ	ラ♭	シ♭	ド
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	2
0	204	316	498	702	814	1018	1200

注. 純正律・ピタゴラス音律・中全音律は異名異音である。つまり，臨時記号の付いた音について，例えば「ファ♯」と「ラ♭」は異なる音高となる。純正律の場合の音高の決め方であるが，やはり和声的に純正であるように決定される。もし「ファ♯」が使われていて，それが「レ・ファ♯・ラ」の長３和音の中で使われていれば，「ファ♯」は「レ」の純正長３度上に

取られる。鍵盤楽器に使用する場合は，「ファ♯」と「ラ♭」を同じ黒鍵で弾かなければならないので，通常はどちらか使用頻度の高いと思われる音に調律される。黒鍵の音として常識的に調律される音は，「ド♯」「ミ♭」「ファ♯」「ソ♯」「シ♭」である。[26, p. 42]

この表を倍音の視点から眺めてみると，「レ」は「ド」の第 9 倍音であり（実際には，$8 = 2^3$ で割られているので，「ド」の 3 オクターブ上の「ド」のすぐ上の「レ」が第 9 倍音），「ミ」は「ド」の第 5 倍音であり（実際には，「ド」の 2 オクターブ上の「ド」のすぐ上の「ミ」が第 5 倍音），$\cdots$ と「ド」の倍音（単音「ド」を鳴らせば，自然と同時に鳴ってしまう音）を並べて作られている音律と考えることができ，「ド」との協和性が高いことは頷ける。

「ド」を主音とするハ長調・ハ短調でこの音律を使用すると，主要 3 和音である主和音・下属和音・属和音は純正で（長音階では 3 音の振動数比がちょうど $4:5:6$，自然短音階ではちょうど $10:12:15$，和声的短音階の属和音もちょうど $4:5:6$）濁りのない和音になる。ヴァイオリン等のフレットのない弦楽器による合奏，吹奏楽，合唱において，ハーモニーの協和性が問われる部分では，現在でもこの音律が理想とされる。ヴァイオリン奏者の玉木宏樹氏は，ヴァイオリン演奏においてはピタゴラス音律と純正律を使い分けて演奏しており，平均律のピッチで奏くことは考えられない，と述べられている。[22, pp. 88-89]（一方，ヴァイオリン奏者がソロで演奏する場合，音程は 12 平均律音律からいちじるしくはずれ，各音程の平均値がピタゴラス音律に近くなっているという報告が [4, p. 265] でなされている。）

では純正律に欠点はあるか？ 実は大きな欠点が存在する。長音階で考えると，「ド–レ」「ファ–ソ」「ラ–シ」の 3 つの全音の振動数比が $1:\frac{9}{8}$（約 203.910 セント）（これは**大全音**と呼ばれる）であるのに対し，「レ–ミ」「ソ–ラ」の 2 つの全音の振動数比は $1:\frac{10}{9}$（約 182.404 セント）（これは**小全音**と呼ばれる）になっている。つまり，約 $203.910 - 182.404 = 21.506$ セントという大きな差（この音程は**シントニック・コンマ**または単に**コンマ**と呼ばれる）のある 2 種類の全音が音階に交互に現れる。したがって純正律は，転調すると純正律のもつ理想的な 7 つの音の振動数比は崩れ，純正律のもつ美しい協和感は失われてしまう。また，大全音と小全音が交互に現れるため，メロディ・ラインがなめらかではない点も大きな欠点である。（ピタゴラス音律では，5 つの全音「ド–レ」「レ–ミ」「ファ–ソ」「ソ–ラ」「ラ–シ」がすべて大全音である。）さらに，すべての完全 5 度が純正であるわけではなく，シントニック・コンマだけ狭い，使い物にならない完全 5 度「レ–ラ」が存在することも問題となる。（純正 5 度は，大全音 2 つと小全音 1 つと全音階的半音（「ミ–ファ」や「シ–ド」）1 つを積み重ねた音程（$1:\left(\frac{9}{8}\right)^2 \times \frac{10}{9} \times \frac{16}{15} = 1:\frac{3}{2}$）であるが，「レ–ラ」は大全音 1 つと小全音 2 つと全音階的半音 1 つを積み重ねた音程になっていることが原因である。この「レ–ラ」がどれくらい使い物にならないかというと，「ラ」の 2 倍音 880 Hz と「レ」の 3 倍音 $(440 \times \frac{27}{40}) \times 3 = 891$ Hz の間で 1 秒間に $891 - 880 = 11$ 回のうなりが生じるという不協和ぶりである。）

注． ヨハネス・ケプラー（1571 年～1630 年：ドイツの天文学者・数学者）や レオンハルト・オイラー（1707 年～1783 年：スイスの数学者）は，純正律を基盤とする下記のような音律を作っている。[10, p. 45] この頃，名の通った数学者・物理学者はたいてい音律問題に首を突っ込んでいて，かなりの数の提案をしていたが，音楽の現場ではたやすく調律できることが重要であるため，実際に使われていた種類は限られていたようである。[25, p. 125] ケプラーやオイラーの音律も，残念ながら実践的な意味をもつには至らなかったが，後続の音律研究者達により幾度となく引用・分析され，それなりの存在感を見せている。

ケプラーの音律の，「ド」の音を基準としたときの，各音の振動数比とセント値の概数は

次の通りである。

ド	ド♯	レ	レ♯	ミ	ファ	ファ♯	ソ	ソ♯	ラ	シ♭	シ	ド
1	$\frac{135}{128}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{405}{256}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{15}{8}$	2
0	92	204	316	386	498	590	702	794	906	1018	1088	1200

ケプラーの音律は，次に紹介する中全音律で使用可能な ♯ が３つ以下，♭ が２つ以下の調に加えて，嬰ハ長調・変イ長調・ロ長調・嬰ハ短調・ヘ短調・変イ短調でも音楽的に使用可能な音律となっている。

次のオイラーの音律も，これとよく似ている。

ド	ド♯	レ	レ♯	ミ	ファ	ファ♯	ソ	ソ♯	ラ	シ♭	シ	ド
1	$\frac{25}{24}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{225}{128}$	$\frac{45}{24}$	2
0	71	204	275	386	498	590	702	773	884	977	1088	1200

IV. 鍵盤楽器のための調律法

12 平均律音律以外の音律は**古典音律**と，そして古典音律での鍵盤楽器の調律は**古典調律**と呼ばれる。

鍵盤楽器の調律は，耳だけを頼りに行われた。(高性能チューナーが存在する現在でも，やはり訓練された人間の耳が最も信頼に足るようだ。[20, p. 169]) 具体的には，まず特定の１オクターブ間だけが調律され（より精度の高い調律を目指し，途中で何度もチェックできる箇所を設けるため，わざわざ２オクターブくらいを調律することもある)，そして残りをオクターブで純正に（２音を同時に弾いて，オクターブが完全に協和するように）調律していく方法が取られる。

注． 残りをオクターブで調律していくとき，実を言えば，12 平均律音律の場合は，完全に純正に取っていくのではなく「調律曲線」[26, p. 38] と呼ばれる曲線を参考に，高い音はほんの少し高めに，低い音はほんの少し低めに調律される。完全に純正に調律してしまうと，人間の耳では，高い音は低めに，低い音は高めに聞こえてしまう。そのさじ加減が調律師の腕の見せ所である。しかし，古典調律ではキッチリと純正にオクターブを取っていく。人間の聞こえ方に合わせてゆがめるよりも，古典調律のもつ純正な響きを生かすために純正にオクターブを取っていく方が，より大きなメリットが得られるようである。

そして，その特定の１オクターブ間の調律は，まず純正点（オクターブ (1 : 2)，完全５度 (2 : 3)，完全４度 (3 : 4)，完全６度 (3 : 5)，長３度 (4 : 5)，短３度 (5 : 6) のいずれか）に調律した後，必要があれば，うなりの数を数えながらそこから少しずらすことにより調律が行われる。

また，ピアノの前身であるクラヴィコード，チェンバロ（ハープシコード）は，すぐに調律が狂うため（ヴァイオリン等と同様に，演奏・練習する前に必ず調律された）短時間に調律できることも重要であった。

ピタゴラス音律に調律するのは簡単である。基本的な考え方は，ピタゴラス音律の作り方 [22, pp. 82–85] の通りに，純正５度を調律し続けることである。しかし，ピタゴラス音律は異名異音 (つまり，例えば「ド♯」と「レ♭」は同じ音高ではない) であるので，まずはその辺りも含めて，

音高をどのように決定するかを説明しよう。完全５度上を「ド」から「ソ」「レ」「ラ」「ミ」「シ」「ファ♯」「ド♯」「ソ♯」「レ♯」「ラ♯」と（これを続けると音が高くなる一方であるので，ときどき１オクターブ下に取り直しながら）次々に音を取っていく。次に，完全５度下を「ド」から「ファ」「シ♭」「ミ♭」「ラ♭」「レ♭」「ソ♭」と（これを続けると音が低くなる一方であるので，ときどき１オクターブ上に取り直しながら）次々に音を取っていく。このとき，「ド♯」と「レ♭」，「レ♯」と「ミ♭」，「ファ♯」と「ソ♭」，「ソ♯」と「ラ♭」，「ラ♯」と「シ♭」は異なる音高になる。詳しく述べると，「ド–レ」は大全音，約 203.910 セントであるのに対し，「ド–ド♯」は約 113.685 セント，「レ♭–レ」も約 113.685 セント，よって「ド♯」が「レ♭」より約 $113.685 \times 2 - 203.91 = 23.46$ セント（まさしく，ピタゴラスのコンマである）高くなる。（このように ♯ の付いた「ド♯」が，次の音である「レ」に近いという点が，ピタゴラス音律が美しいメロディ・ラインを生み出す理由の１つとされている。）この音程のセント値は「レ♯」と「ミ♭」，「ファ♯」と「ソ♭」，「ソ♯」と「ラ♭」，「ラ♯」と「シ♭」の間でも全く同様である。（ピタゴラスのコンマがなければ，２つの音高はすべて一致し，音律は異名同音となる。）しかし，鍵盤楽器の調律を行うとき，黒鍵は１つずつであるので，黒鍵をどちらで調律するか決めなくてはならない。通常，黒鍵の音として調律される音は，「ド♯」「ミ♭」「ファ♯」「ソ♯」「シ♭」である。５度圏を観察すると，これはピタゴラスのコンマだけ狭い完全５度を，「ソ♯–ミ♭」（表記上は減６度になっているが）に設定することに他ならない。よって，「ド」から完全５度上を「ソ」「レ」「ラ」「ミ」「シ」「ファ♯」「ド♯」「ソ♯」と純正に調律し，次に「ド」から完全５度下に「ファ」「シ♭」「ミ♭」と純正に調律して１オクターブの調律が完了する。これでピタゴラスのコンマは，「ソ♯」のキーと「ミ♭」のキー間にピタゴラスのコンマだけ狭い完全５度として処理される。[28, pp. 1-4]

IV- i.　調律法の変遷概観

個々の調律法を詳しく述べる前に，12 平均律音律が一般的になるまでの歴史的な流れを概観してみよう。

16 世紀初めまでは，鍵盤楽器はピタゴラス音律で調律されていた。[24, p. 16]　しかし，先にも述べたように，ラミスの音律が登場し，３度の重要性が増したこともあり，1523 年に**中全音律**が考案された。これ以降ヨハン・ゼバスティアン・バッハまでは，中全音律こそがヨーロッパの調律法だと言える。さらに，初期バロックまでの作品からは，鍵盤楽器に限らず，その他の楽器の音楽・声楽作品にも，中全音律を想定していると思われるものがある。[10, pp. 28–29]　中全音律はヨーロッパの多くのオルガンの調律に採用され（ジルバーマン調律等，中全音律を少し改良したものも含める），19 世紀でも多くのオルガンは未だに中全音律で調律されていた。結局，中全音律は後から登場するウェル・テンペラメントとひとくくりにされる様々な音律が登場した後も併用され，12 平均律音律が主流となる 19 世紀後半まで使い続けられた。（音律を分類するとき，ピタゴラス音律が弦楽器で多用される「旋律的音律」と性格付けられるのに対し，中全音律は純正律と同様「和声的音律」と性格付けられる。[25, p. 78]）

中全音律は，純正律に匹敵する美しい和音をもっていたが，それは限られた調性のみであり，その他の調性では実用性をもっていなかった。そのため，すべての調で使用できる調律法の模索が続けられた。そして，創り出された，一応すべての調性で使用可能である調律法は，**ウェル・テンペラメント**とひとくくりにして呼ばれる。この名称は，ヨハン・ゼバスティアン・バッハ（1685 年～1750 年）の「平均律クラヴィーア曲集」の原題 “Das Wohltemperierte Klavier”（英訳では“The Well-Tempered Clavier”）に因んで 20 世紀に命名されたものである。ここでの“temperierte”は「加減された」であり，よって，“Wohltemperierte”とは，「鍵盤楽器があらゆる調で演奏可能とな

るように，音程は意識的に間違って（しかしできるだけ耐えられる範囲で），上手く調律された」という意味になる。[1, p. 106] （これに対し，12 平均律音律は**イコール・テンペラメント**（equal temperament：等分調律）と呼ばれることもある。）ウェル・テンペラメントはすべての調性で使える音律であるが，不等分音律であるために，調性によって表情が変わり（♯, ♭が少ない調は和声的性格をもち，増えるにつれて旋律的性格に変化していくとも言われる），それが音楽表現を豊かにするという特長をもっている。(音律を分類するため，このことを言葉で表現すると「調性的音律」となる。[25, p. 78])

それに対して，現在一般的に使われている 12 平均律音律であるが，そのアイディアはそれ以前にもあり，その計算を行った数学者もいたが，最初に 2 の 12 乗根を精度高く計算し，それが使えるように計算結果を書物に著したのは，マラン・メルセンヌ（1588 年 ～ 1648 年：フランスの神学者・数学者）が「普遍的調和：音楽の理論と実際」（1636 年）においてであった。この音律は，16 世紀頃からフレットをもつ弦楽器（リュート，ギター，ヴィオラ・ダ・ガンバ）には使われていた可能性が高いが，19 世紀後半まで，多くの音楽家には受け入れられなかった。中全音律のように，調によって得手不得手はあるが，得意な調ではたいへん美しいとか，ウェル・テンペラメントのように，調性によって和音の表情が変わり表情豊かであるとか，ということがなかったからである（和音は全部同じ表情であり，単調で個性がない）。(音律分類上の性格付けは，「平均的音律」としか言いようがない。[25, p. 78])

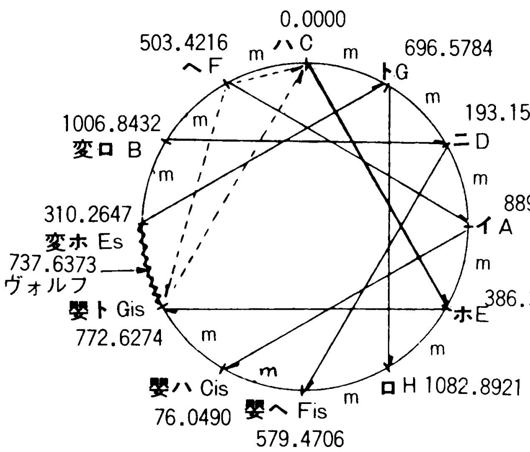
そして，19 世紀の半ばまでは，それぞれ異なった性格をもつ，中全音律, 様々なウェル・テンペラメント，平均律音律が共存した。しかし 19 世紀半ばにこの共存関係が崩れ，19 世紀末には，ほとんどのピアノは 12 平均律音律で調律されるようになる。その理由は，各音律について詳しく説明した後に述べる。

では次に，主要な調律法を個々に説明していこう。

IV- ii. 中全音律（ミーントーン）

（ヘンデル・モーツァルトに愛され，マーラーが平均律に取って変わられたことを嘆いた調律法）

ピエトロ・アーロンが 1523 年に考案した鍵盤楽器の調律法。$\frac{1}{4}$ **コンマの中全音律**とも呼ばれる。長３度が純正になるように，ピタゴラス音律を改良した音律（調律法）であるが，和声的音律である純正律を，♯ が３つまでと ♭ が２つまでの，長調・短調とも６つまでの調性に転調を可能とした音律とも捉えることができる。



[25, p. 103] から引用。m は中全５度，実線の矢印つきの弦は純正長３度を表す。

中全音律は， 次のような発想で作られている。５度圏を右回りに４つ進んでみよう。例えば，「ド」(C) から「ソ」(G) 「レ」(D) 「ラ」(A) 「ミ」(E) と４つ進んだとき，最後の「ミ」は最初の「ド」の２オクターブと長３度上の音である。もし，長３度を純正にするのであれば，もちろんオクターブは純正に取るので，この完全５度を４つ積み重ねた音程は振動数比で $1:2^2\times\frac{5}{4}=1:5$（約 $1200\times2+386.314=2786.314$ セント）でなくてはならない。これは，純正５度を４つ積み重ねた音程（約 $701.955\times4=2807.820$

セント）よりもシントニック・コンマだけ狭い音程である。(実際に $2807.820 - 2786.314 = 21.506$ セント。この事実は，純正律ハ長調において，「ド–ソ」「ソ–レ」「ラ–ミ」が純正５度であるのに対し，「レ–ラ」が純正よりシントニック・コンマだけ狭い完全５度であったことから説明できる。) 振動数比 $1 : 5$ (約 2786.31 セント) を４等分してみると，振動数比は $1 : 5^{\frac{1}{4}} \fallingdotseq 1 : 1.4953$ (約 $\frac{2786.31}{4} \fallingdotseq 696.578$ セント）となる。この純正より約 $701.955 - 696.578 = 5.377$ セント（当然, シントニック・コンマの $\frac{1}{4}$）狭い完全５度は，**中全５度**と呼ばれる。そして，すべての完全５度をこの中全５度で取るのが**中全音律**である。中全音律で５度圏を１周すると，純正５度で１周したときより約 $5.377 \times 12 \fallingdotseq 64.52$ セント狭い。純正５度で１周すると，１周（７オクターブ) $1200 \times 7 = 8400$ セントより，ピタゴラスのコンマ分の約 23.46 セント広かったので，差し引き約 $64.52 - 23.46 = 41.06$ セント狭くなる。このため，中全音律もまた異名異音であり，具体的には「ド♯」が「レ♭」より約 41.06 セント低くなり (ピタゴラス音律とは逆である)，「ド–ド♯」，「レ♭–レ」がともに約 76.05 セントとなる。この音程のセント値は「レ♯」と「ミ♭」，「ファ♯」と「ソ♭」，「ソ♯」と「ラ♭」，「ラ♯」と「シ♭」の間でも全く同様である。しかし，鍵盤楽器の黒鍵は１つずつであるので，通常，黒鍵の音として「ド♯」「ミ♭」「ファ♯」「ソ♯」「シ♭」が調律される。つまり,「ミ♭」から５度圏を右回りに「ソ♯」までの 11 個の完全５度が中全５度になるように調律される。この結果，「ソ♯–ミ♭」の完全５度 (表記上は，減６度になっているが) がしわ寄せを受け，約 $1200 \times 7 - 696.578 \times 11 \fallingdotseq 737.64$ セントという，純正な完全５度 701.96 セントより約 $737.64 - 701.96 = 35.68$ セント!! も広いひどく狂った完全５度になってしまう。(この完全５度は，そのひどい和音が狼の吠える声を連想させるため，**狼の５度**と呼ばれている。)

このようにして作られた中全音律であるが，狙い通り，８つの長３度が純正になっている。長３度は，５度圏を右回りに４つ進むことにより導き出すことができた。(実際は，２オクターブと長３度であるが。) よって，中全音律の５度圏は 11 個の中全５度と１個の狼の５度からできていたので，狼の５度を４つの中に含まない $12 - 4 = 8$ 個の長３度「ド–ミ」「ソ–シ」「レ–ファ♯」「ラ–ド♯」「ミ–ソ♯」「ミ♭–ソ」「シ♭–レ」「ファ–ラ」が純正なものであり，それら以外の４つは純正よりかなり広くなってしまう。

中全音律のメリットは，やはり長３度の和音が美しく響くことである。やや狭い完全５度は僅かなビートが感じられるが，純正な長３度と合わせると十分美しく聞こえるし，むしろ柔らかい和声的輪郭を与えることに成功しているとも言える。ほとんど純正律に匹敵する，美しい和声をもった調律法である。ただ，狼の５度の影響で，すべての長３度が純正であるわけではない。♯ が３つまでと ♭ が２つまでの，長調・短調とも６つまでの調性の主要３和音に狂った響きが含まれないように工夫された音律と言え，使用できる調はそれらに制限されてしまうというデメリットをもっている。[25, p. 105]

しかし，この音律はモーツァルト，ヘンデルをはじめとする多くの音楽家から愛され，17 世紀から 19 世紀にかけて広く用いられた。その事実は，特にウィーン古典派の作品は中全音律で演奏可能な調性で書かれたものが非常に多いことから見て取れる。また，「平均律クラヴィーア曲集」ではヴェルクマイスター調律を用いたと考えられるバッハが，その生涯で演奏したオルガンは中全音律で調律されたものであり，バッハは中全音律を認め受け入れていたことが窺い知れる。[10, p. 33] 事実，バッハの大多数の曲は中全音律で演奏できる調性で書かれているし，そうでない場合，演奏者はその楽曲の適切な解釈をするために，わざわざその調性が選ばれた，それ相応の理由を見つけ出す必要があるのかもしれない。[11, pp. 27-28]

さて，「中全音律」という名前の由来であるが，これは 12 個存在する全音のうち 10 個が，純正律の大全音と小全音のちょうど中間（「ミーン」) $1 : \frac{\sqrt{5}}{2}$ の振動数比になっていることに由来

している。実は，全音の大きさも５度圏から導き出すことができる。完全５度を２つ進むと，１オクターブと全音１つ分の音程になる。例えば，「ド」から「ソ」「レ」と進むと，「レ」は「ド」の１オクターブと全音上の音である。よって，中全音律の５度圏は 11 個の中全５度と１個の狼の５度からできていたので，狼の５度のところにある２つの全音「ド♯–ミ♭」「ソ♯–シ♭」(表記は減３度だが) が他のものより広めになる。では，同じ大きさの 10 個の全音の振動数比を調べてみよう。中全５度 ($1 : 5^{\frac{1}{4}}$) を２つ積み重ねた音程が１オクターブとその全音であったから，全音の振動数比は

$$1 : \frac{\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^2}{2} = 1 : \frac{\sqrt{5}}{2}$$

である。一方，大全音と小全音のちょうど中間の音程は，II 準備 (純正・音のものさし「セント」・５度圏・音程に関する計算上の注意) の「音程に関する計算上の注意 (2)」より

$$1 : \sqrt{\left(\frac{9}{8}\right)\left(\frac{10}{9}\right)} = 1 : \frac{\sqrt{5}}{2}$$

である。よって，振動数比 $1 : \frac{\sqrt{5}}{2}$ の 10 個の全音は，大全音と中全音のちょうど中間の音程をもつことが分かる。また，「$\frac{1}{4}$ コンマの中全音律」とも呼ばれるが，これは中全５度が，純正５度よりシントニック・コンマの $\frac{1}{4}$ だけ狭いことに由来する。

この音律の,「ド」を基準としたときの，各音の振動数比とセント値の概数は次のようになる。

ド	ド♯	レ	ミ♭	ミ	ファ	ファ♯	ソ	ソ♯	ラ	シ♭	シ	ド
1	$\frac{5\sqrt[4]{125}}{16}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{4\sqrt[4]{5}}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{2\sqrt[4]{125}}{5}$	$\frac{5\sqrt{5}}{8}$	$\sqrt[4]{5}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{\sqrt[4]{125}}{2}$	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$	$\frac{5\sqrt[4]{5}}{4}$	2
0	76	193	310	386	503	579	697	773	890	1007	1083	1200

中全音律の調律法 [11, p. 216]　中全音律の実際の調律の仕方を説明してみよう。ピタゴラス音律の調律のやり方をそのまま用いると，うなりを聴きながら調律するという手間のかかる中全音律の調律を 11 回繰り返さなければならないので，できればそれは避けたい。純正な長３度がたくさんあるところに注目して，できるかぎりその純正長３度を使って調律を行う。「レ」(D3) から「レ」(D4) の間を調律しよう。

1. まず，「ド」(C4) 261.6 Hz を音叉 (C = 523.25 Hz) またはチューナーを使ってぴったり調律する。(うなりがないようにぴったり調律するので，C4 を調律するときも，C = 261.6 Hz の音叉を使うよりは，C = 523.2 Hz の音叉を使う方が，うなりの数が２倍になるので調律しやすい。)

2. 「ド」(C4) から１オクターブ下の「ド」(C3) を純正に調律し,「ド」(C3) から中全５度上に「ソ」(G3)，さらに「ソ」(G3) から中全５度上に「レ」(D4) を下記の方法で調律し，再び「レ」(D4) から１オクターブ下の「レ」(D3) を純正に調律してから，中全５度上に「ラ」(A3) を調律する。これで，中全５度間隔の「ド」「ソ」「レ」「ラ」が調律できたことになる。

   中全５度上を調律する方法：「ド」(C3) から「ソ」(G3) を調律する場合で説明しよう。「ド」(C3) の振動数を $261.63 \div 2 = 130.815$ Hz とするとき，調律したい中全５度上の「ソ」(G3) の振動数は，$130.815 \times 5^{\frac{1}{4}} \fallingdotseq 195.614$ Hz となるので，この２つの音の倍音を調べてみると，

	1倍音	2倍音	3倍音	4倍音	5倍音	6倍音
「ド」(C3)	130.82	261.63	392.45	523.26	654.08	784.89
「ソ」(G3)	195.61	391.23	586.84	782.46	978.07	1173.68

であり，「ド」の3倍音と「ソ」の2倍音が1秒間に約 $392.45 - 391.23 = 1.22$ 回うなることが分かる。(「ド」の6倍音と「ソ」の4倍音も1秒間に $784.89 - 782.46 = 2.43$ 回うなるが，6倍音と4倍音なので振幅 (音量) は小さい。) これを一般化すると，ある音の振動数を x Hz とするとき，調律したいその中全5度上の音は，純正点から音をゆっくりと低くしていき，うなりが1秒間に

$$x \times \left(3 - 5^{\frac{1}{4}} \times 2\right) \fallingdotseq 0.0093024\,x$$

回となるところに調律すればよいことになる。

この式を使って必要なうなりの数を計算してみると，

- 「ド」(C3) (約 130.815 Hz) から「ソ」(G3) は1秒間に約 $0.0093024 \times 130.815 \fallingdotseq 1.2$ 回 (つまり，5秒間に約6回)
- 「ソ」(G3) から「レ」(D4) は，「ソ」(G3) の振動数が約 195.614 Hz であるので，1秒間に約 $0.0093024 \times 195.614 \fallingdotseq 1.8$ 回 (つまり，1秒間に2回弱)
- 「レ」(D3) から「ラ」(A3) は,「レ」(D3) の振動数が約 $195.614 \times 5^{\frac{1}{4}} \div 2 \fallingdotseq 146.255$ Hz であるので，1秒間に $0.0093024 \times 146.255 \fallingdotseq 1.4$ 回 (つまり，2秒間に約3回)

となる。

3. 後は，すでに調律の終わった「ド」「ソ」「レ」「ラ」から，長3度上や下の音を純正に調律していく。具体的には，順に,
   - 「ド」(C3) から上に「ミ」(E3)，さらに「ミ」(E3) から上に「ソ♯」(G3)
   - 「ソ」(G3) から上に「シ」(B3)，下に「ミ♭」(E♭3)
   - 「レ」(D3) から上に「ファ♯」(F♯3)，1度「レ」の1オクターブ上の「レ」(D4) を純正に調律してから，下に「シ♭」(B♭3)
   - 「ラ」(A3) から上に「ド♯」(C♯4)，下に「ファ」(F3)

これで,「レ」(D3) から「レ」(D4) の間が調律された。調律の確認は，5度圏の隣合う中全5度を使って，再びうなりを数えながら行える。

注. 18世紀になって，バッハと親交のあったゴットフリート・ジルバーマン (1683年～1753年 : ドイツのバロック・オルガン製作者。バッハはジルバーマンの制作・調律したオルガンを弾いていたと言われている。[10, p. 33]) は，「$\frac{1}{6}$ **コンマの中全音律**」を提唱している。[19, p. 220] これは，中全音律が，純正よりシントニック・コンマの $\frac{1}{4}$ 狭い中全5度により定義されていることに注目し，純正よりシントニック・コンマ (ピタゴラスのコンマの可能性もあるようである) の $\frac{1}{6}$ 狭い完全5度を用いて，中全音律と同様に定義される音律で，その完全5度は約 698.37 セントとなるので，中全5度 (約 696.58 セント) より少し純正5度 (約 701.96 セント) に近づき，狼の5度 (737.64 セント) も約 717.92 セントと改善している。ただし，長3度は 393.48 セントとなり，中全音律がこだわっていた純正な長3度 (386.31 セント) は失われている。

IV- iii. ウェル・テンペラメント

(バッハやベートーヴェン, その他多くの作曲家が使っていた調律法)

純正５度より約 35.68 セントも広い「狼の５度」の存在が，中全音律で使用できる調を限定させていたのであった。この「狼の５度」を解決する方法として，11 個の中全５度（純正５度よりシントニック・コンマの $\frac{1}{4}$，約 5.377 セント狭い）のいくつかを純正５度に置き換える試みがなされた。(何と自然な発想でしょうか。) 具体的にどこを置き換えるのかは，いろいろなやり方がある。このようにして得られた調律法は，後の 20 世紀に**ウェル・テンペラメント**と総称されることになったのはすでに述べたとおりである。代表的なものに，ヴェルクマイスター，キルンベルガー，ヤング等がある。(アンドレアス・ヴェルクマイスター（1645 年～1706 年）はドイツのオルガン奏者・音楽理論家。ヨハン・フィリップ・キルンベルガー（1721 年～1783 年）はドイツの作曲家・鍵盤奏者・音楽理論家。バッハの弟子で，1771 年に「純正作曲の技法」(この中でキルンベルガー第２法が解説されている。[11, p. 43] そして，ベートーヴェンはこの本で教育を受けている [11, p. 68]) を著している。トマス・ヤング（1773 年～1829 年）はイギリスの物理学者。弾性体力学の基本定数ヤング率に名前を残し，エネルギー (energy) という用語を最初に用いた。ベートーヴェン（1770 年～1827 年）と同時代の人である。) これらは，完全５度を部分的に置き換えたため，調によって和音の響きや旋律の感じが変わるのが特徴である。17 世紀から 20 世紀初頭まで多くの作曲家に使われた。

ここでは，様々なウェル・テンペラメントの中から，ヴェルクマイスター第１技法 III 音律 (1681 年) (バッハが平均律クラヴィーア曲集の作曲に使ったとも言われる)，キルンベルガー第２法 (1771 年) (当時は，次の第３法よりこちらの方が人気があったようである [25, p. 136])，キルンベルガー第３法 (1779 年) (現在では，キルンベルガーの調律法と言えばこちらを意味することが多い) をウェル・テンペラメントの代表的な調律法として取り上げてみる。

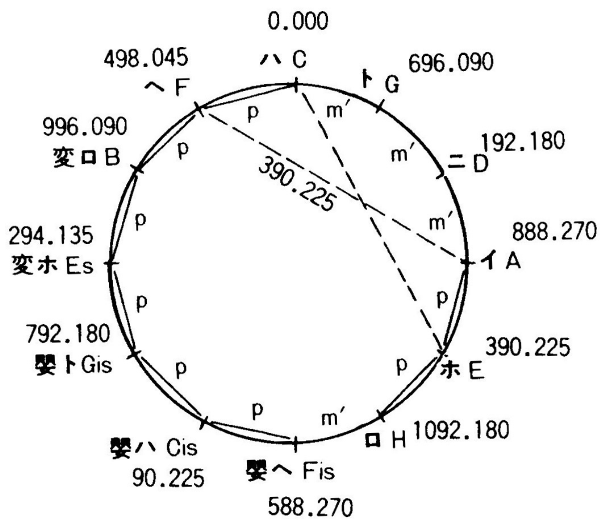
ヴェルクマイスター第１技法 III 音律 (1681 年)

ヴェルクマイスターが残した多くの音律の中で最も広く普及した第１技法 III は，４つの中全５度と８つの純正５度の組み合わせで作られようとした。しかし，そのままでは５度圏は閉じない。実際，中全５度は振動数比 $1:5^{\frac{1}{4}} \fallingdotseq 1:1.4953$ であり，４つの中全５度を積み重ねた音程の振動数比は $1:(5^{\frac{1}{4}})^4 = 1:5$。そして，８つの純正５度を積み重ねた音程の振動数比は $1:(\frac{3}{2})^8$。したがって，４つの中全５度と８つの純正５度を積み重ねた音程の振動数比は

$$1:5\times\left(\frac{3}{2}\right)^8 \fallingdotseq 1:128.14$$

である。しかし，５度圏１周はちょうど７オクターブ，振動数比で

$$1:2^7 = 1:128$$



[25, p. 129] から引用。p は純正５度，m′ は中全５度よりさらに狭い５度，点線の弦は純正より少し広い長３度を表す。

であったので，４つの中全５度と８つの純正５度で作られる音律は，若干１オクターブより広い。

これを矯正するため，8 つの純正 5 度はそのままにして，4 つの中全 5 度を，さらに等しく狭く取り直すことにした。つまり，

$$1 : \left(\frac{2^7}{\left(\frac{3}{2}\right)^8} \right)^{\frac{1}{4}} \fallingdotseq 1 : 1.4949$$

とする。(この取り直した完全 5 度を，ここでは便宜上「中全改」と呼ぼう。) 4 つの中全改と 8 つの純正 5 度を積み重ねた音程はきっちり 7 オクターブとなるので，この音律は異名同音になる。

この音律の,「ド」を基準としたときの，各音の振動数比とセント値の概数は次のようになる。

ド	ド♯	レ	ミ♭	ミ	ファ	ファ♯	ソ	ソ♯	ラ	シ♭	シ	ド
1	$\frac{256}{243}$	$\frac{64\sqrt{2}}{81}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{256\sqrt[4]{2}}{243}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1024}{729}$	$\frac{8\sqrt[4]{8}}{9}$	$\frac{128}{81}$	$\frac{1024\sqrt[4]{2}}{729}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{128\sqrt[4]{2}}{81}$	2
0	90	192	294	390	498	588	696	792	888	996	1092	1200

ヴェルクマイスター第 1 技法 III 音律 (1681 年) の調律法. 実際の調律は次の手順で行う。[29] うなりを数えながら調律する回数は，中全音律と同様 3 回であるので，この音律も比較的短時間で調律できる。

中全音律のときと同様な方法で計算すると，中全改を調律するときのうなりの回数は，次のようになる。(中全 5 度よりさらに狭いので，うなりの回数は増えている。) ある音の振動数を x Hz とするとき，調律したいその中全改 5 度上の音は，純正点から音をゆっくりと低くしていき，うなりが 1 秒間に

$$x \times \left(3 - \left(\frac{2^7}{\left(\frac{3}{2}\right)^8} \right)^{\frac{1}{4}} \times 2 \right) \fallingdotseq 0.0101461\,x$$

回になるところに調律する。

「ファ」(F3) から「ミ」(E4) の 1 オクターブ間を調律してみよう。

1. まず,「ド」(C4) 261.6 Hz を音叉 (C = 523.25 Hz) またはチューナーを使ってぴったり調律する。
2. 次に,「ド」(C4) から完全 5 度下を (これを続けると音が低くなる一方であるので，ときどき 1 オクターブ上を調律しながら)「ファ」(F3)「シ♭」(B♭3)「ミ♭」(E♭4)「ラ♭」(A♭3)「レ♭」(D♭4)「ソ♭」(G♭3) と音を調律していく。このとき，異名同音であるから「シ♭」と「ラ♯」,「ミ♭」と「レ♯」,「ラ♭」と「ソ♯」,「レ♭」と「ド♯」,「ソ♭」と「ファ♯」は同じ音高である。

   これで，5 度圏の左半分の純正 5 度が連なる部分の調律ができた。

3. 再び「ド」(C4) からオクターブ下の「ド」(C3) を純正に調律し,「ド」(C3) から中全改 5 度上に「ソ」(G3)，さらに「ソ」(G3) から中全改 5 度上に「レ」(D4) を調律し，オクターブ下の「レ」(D3) を純正に調律してから，中全改 5 度上に「ラ」(A3) を調律する。これで，中全改 5 度間隔の「ド」「ソ」「レ」「ラ」が調律できたことになる。中全改 5 度上を取るときに必要なうなりの数を計算してみると，
   - 「ド」(C3) から「ソ」(G3) は,「ド」(C3) の振動数が約 130.815 Hz であるので，1 秒間に約 $0.0101461 \times 130.815 \fallingdotseq 1.3$ 回 (3 秒間に約 4 回)

- 「ソ」(G3) から「レ」(D4) は，「ソ」(G3) の振動数が約 $130.815 \times \left(\frac{2^7}{\left(\frac{3}{2}\right)^8}\right)^{\frac{1}{4}} \fallingdotseq$ 195.559 Hz であるので，1 秒間に約 $0.0101461 \times 195.559 \fallingdotseq 2.0$ 回
- 「レ」(D3) から「ラ」(A3) は，「レ」(D3) の振動数が約 $195.559 \times \left(\frac{2^7}{\left(\frac{3}{2}\right)^8}\right)^{\frac{1}{4}} \div 2 \fallingdotseq$ 146.173 Hz であるので，1 秒間に $0.0101461 \times 146.173 \fallingdotseq 1.5$ 回

となる。

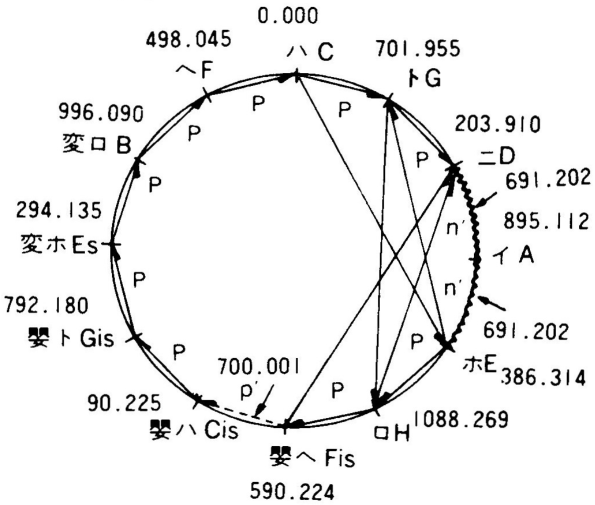
4. 最後に調律した「ラ」(A3) から再び純正 5 度上を順に，「ミ」(E4)，1 度オクターブ下の「ミ」(E3) を純正に調律してから，「シ」(B3) と調律する。

5. 2. の最後に調律した「ファ♯」(F♯3) と 4. の最後に調律した「シ」(B3) の完全 4 度を同時に鳴らして，1 秒間に 2.5 回うなっていることを確認する。

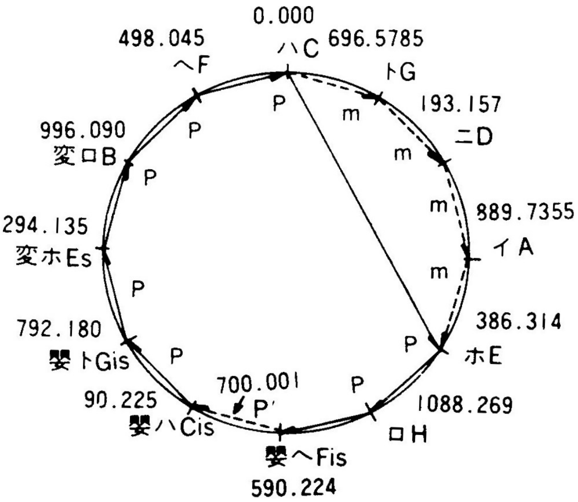
   (この他にも，途中でこれまで行ってきた調律を確認する箇所は何カ所も存在する。)

   これで「ファ」(F3) から「ミ」(E4) の 1 オクターブが調律できた。

キルンベルガー第 2 法 (1771 年)，キルンベルガー第 3 法 (1779 年)



キルンベルガー第 2 法



キルンベルガー第 3 法

[25, p. 135] から引用。p は純正 5 度，m は中全 5 度，長い方の 3 つの弦は純正長 3 度を表す。

18 世紀，音楽に関して最も話題に上がった「時のテーマ」は音律問題であり，すでに存在する音律の弱点を克服すべく，新たな音律が次々に生み出された。そして，18 世紀に考案された数ある音律の中で，結局生き残ったのはキルンベルガーの音律のみであった。[11, p. 50]

その考え方は，まずは「ド–ミ」の長 3 度を純正（4 : 5）に取る。そのとき，5 度圏を右回りに「ド」「ソ」「レ」「ラ」「ミ」と上がっていく 4 つの完全 5 度を積み重ねた音程は，ちょうど 2 オクターブと純正な長 3 度，約 $2 \times 1200 + 1200 \times \log_2 \frac{5}{4} \fallingdotseq 2400 + 386.31 = 2786.31$ セントである。よって，「ミ」から 5 度圏を右回りに「ド」まで上がっていく残りの 8 つの完全 5 度を積み重ねた音程は，(7 オクターブ) − (2 オクターブと純正な長 3 度) $\fallingdotseq 7 \times 1200 - 2786.31 = 5613.69$ セントでなくてはならない。一方，純正 5 度を 8 つ積み重ねた音程は $8 \times 1200 \log_2 \frac{3}{2} \fallingdotseq 8 \times 701.955 = 5615.64$ セント。よって，「ミ」から 5 度圏を右回りに「ド」まで上がっていく 8 つの完全 5 度をすべて純正にするには，わずかに約 $5615.64 - 5613.69 = 1.95$ セント（実はこれは，ピタゴラスのコンマと

シントニック・コンマの差に他ならない。この差は**スキスマ**と呼ばれる）だけ足りない。キルンベルガーはこの部分を，7 つの純正５度（約 701.96 セント）とわずかに狭い $701.96 - 1.95 = 700.01$ セントの完全５度１つを組み合わせることにし，この狭い完全５度を「ファ♯–ド♯」の間に置いた。これで，「ミ」から「ド」までは決定された。後は，「ド」から「ミ」までの完全５度４つである。**キルンベルガー第３法**は，この部分を中全５度４つに取る。このとき，５度圏で「ド」から「ミ」までは中全音律そのもの，「ミ」から「ド」は（ほぼ）純正５度が並びピタゴラス音律風になっている。現在キルンベルガーと言う場合，こちらを指すことが多い。一方，「ド」から「ミ」までの完全５度４つを，「ド–ソ」「ソ–レ」の２つを純正に取り，残りの「レ–ラ」「ラ–ミ」を $(2786.31 - 701.96 \times 2) \div 2 \fallingdotseq 691.20$ セント（かなり狭い緊張感のある完全５度となっている）と取るのが**キルンベルガー第２法**である。５度圏から分かるように，第２法は第３法より，純正な５度も純正な長３度も２つずつ多くもっている。その代わり，かなり狭い完全５度を２つもつことになり，その使い方が難しいとされている。純正な長３度・完全５度を多くもつ第２法は，当時は第３法よりも人気があったようで，ベートーヴェンも第２法を使用していたと言われている。そして，ベートーヴェンのピアノ・ソナタに影響を受けた後続の作曲家達も第２法を使っていたことが，第２法での問題となるたいへん狭い２つの完全５度を避ける調性が選ばれていることから窺い知れるようである。

これら２つの音律の,「ド」を基準としたときの，各音の振動数比とセント値の概数は次のようになる。ただし，第３法に関しては，第２法と異なる音のみ数値を記入している。

	ド	ド♯	レ	ミ♭	ミ	ファ	ファ♯	ソ	ソ♯	ラ	シ♭	シ	ド
2	1	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{128}{81}$	$\frac{3\sqrt{5}}{4}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{15}{8}$	2
法	0	90	204	294	386	498	590	702	792	895	996	1088	1200
3			$\frac{\sqrt{5}}{2}$					$\sqrt[4]{5}$		$\frac{\sqrt[4]{125}}{2}$			
法			193					697		890			

キルンベルガーの調律法． ここまで丁寧に読んできた読者には，自分で考えることができると思われるので割愛する。

注 1． ちなみに，バッハは，チェンバロもクラヴィコードも，自分で 15 分もかからずに調律したと伝えられているが，どのように調律したかという記録はない。おそらくヴェルクマイスターを使用していただろうと言われているが，他にも様々な説がある。その中には，自身で生み出した音律を使っていたという説さえある。「平均律クラヴィーア曲集」第１集の自筆譜表紙には，ページの最上部に左右いっぱいに渦巻模様が描かれているが，これがその音律を表しているというのである。（バッハは曲の中で様々な数字遊びを行うような作曲家である。）この考え方は，1999 年に数学者のスュパルシュー（ダルムシュタット技術大学）が最初に発表し（Andreas Sparschuh, Stimm-Arithmetik des wohltemperierten Klaviers, Deutsche Mathematiker Vereinigung Jahrestagung 1999, Mainz, pp. 154-155），これをきっかけとして，この渦巻模様に関する様々な解釈が現れることになった。いずれにしても，それまで中全音律で演奏可能な調性，つまり調性記号に ♯ や ♭ が少ない調が使われていた時代から，徐々に使用できる調の拡大が試みられ，その頂点に「平均律クラヴィーア曲集第１巻」(1722) が位置している。同じ年に，ジャン=フィリップ・ラモー（1683 年～1764 年：フランスの作

曲家・音楽理論家) の「和声論」(ルネサンス期から使用されていた 3 和音に理論的な裏付けを与え，長調と短調の概念などを初めて理論的に論じている) も出版されている。

注 2. 長音階・短音階を使って作曲されたクラシック音楽の作品には，必ず調性が書かれている。(例： ベートーヴェン作曲の交響曲第 9 番ニ短調 作品 125「合唱つき」) しかし，作曲家はどのような理由でその調性を選んだのであろうか？ 国際標準音高 A = 440Hz が定められたのは，1939 年のロンドンでの国際会議においてであり，それまではかなり異なる様々な音高が使われていたので，音高が主な理由とは考えにくい。ヴァイオリン等の弦楽器では，開放弦がどの音であるかという関係で，調性によって鳴り方が変わる。管楽器も，その構造上鳴りやすい音・鳴りにくい音がある。よって作曲家はそれらを考慮し，その曲に対する自分のイメージに近い音が実現できる調性を選んだということがまず考えられる。

しかしピアノ独奏曲についてはどうか？ 実は，古典調律では，調により調性格というものが生じている。(次に紹介する 12 平均律音律では，調性格は存在しない [1, p. 106], [18, p. 237], [4, p. 247], ⋯) ハープシコード奏者の橋本英二氏は，[19, pp. 225-256] において次のように述べている。例えば，「(バッハの) トッカータ ヘ短調 (BWV910, 1710 年頃の作) の中間部には 1 小節の短いモティーフがなんと 22 回も繰り返される。この間の転調は広範囲にわたるがモティーフそのものは変わらないので，平均律の調律法だと延々と続く繰り返しが退屈に聞こえて，想像力豊かなバッハがなぜこのように書いたのかと不思議に思うかもしれない。ところがこれを，当時のジルバーマンなりヴェルクマイスターの調律法で弾くと驚くべき変化が聞かれる。(中略) 各和音の個性に気づくだろう。こうした和音内の音程はそれぞれ異なるので，うなりから色彩，緊張感にいたるまで多様で，モティーフが変化しないだけによけい集中できて，現代の調律法では聴けない面白さが味わえる。」やはり，作曲家の意図を深く理解するためには，作曲時に用いられた調律法で調律された楽器を弾く必要がありそうである。

実は，作曲家・演奏家・調律師の分業化が行われたのは 19 世紀以降のことであり，それまでは作曲家は自分の演奏する鍵盤楽器を自分で調律していた。そのため，19 世紀以降の作曲家より，調律法の選択には敏感であり厳格であった。キルンベルガーは述べている。「偉大な作曲家達は，調性選択において非常に注意深かった。その曲の情緒に適切な調性をただ選ぶというのではなく，12 の調性の中からまさにピッタリの調性を探しぬくのである。(中略) しかし，もし 12 平均律音律なら，すべての調性はただ 2 つの調性，つまりハ長調とイ短調の移調にすぎないのである。つまり，各調性の豊かな性格は実質的にはこの 2 つの調性の性格だけに還元されてしまう。」(キルンベルガー「種々さまざまな音楽」(1769 年))

ベートーヴェンはキルンベルガーを使用していたとされる。イコール式音楽研究所所長の橋本絹代氏は [21, p. 120] で次のように述べている。「ベートーヴェンは「悲愴ソナタ」をハ短調で，「月光ソナタ」を嬰ハ短調で書いた。何故なら「キルンベルガー音律 」のハ短調は緊張した主和音 (著者注.「ド–ソ」の完全 5 度は純正であるが，「ド–ミ♭」の短 3 度が約 294 セント。純正な短 3 度が約 316 セント，12 平均律音律はもちろん 300 セントであるので，不協和な 12 平均律音律よりさらに不協和である) と純正の属和音をもち，それがベートーヴェンにとっては悲愴感と密接に結び付いていたのだから。嬰ハ短調は，緊張した主和音と属和音 (著者注. 主和音は，「ド♯–ソ♯」の完全 5 度は純正であるが，「ド♯–ミ」の短 3 度が約 296 セントである。属和音は，「ソ♯–レ♯」の完全 5 度は純正であるが，「ソ♯–シ♯」の長 3 度が 408 セントであり，純正 386 セントから大きく離れ，これも 12 平均律音律の 400 セント以上に不協和な音程になっている)，純正に近い下属和音 (著者注.「ファ♯–ド♯」の完全

5 度が約 700 セントで，純正 702 セントにほぼ一致。第 2 法の場合は，「ファ♯–ラ」の短 3 度が 305 セントで，純正 316 セントに平均律よりは近い。ちなみに，第 3 法だと約 299.51 セントでほぼ平均律と同じである）がベートーヴェンに幻想的な情緒を抱かせたのではないだろうか。それ故，ベートーヴェンにとって，「悲愴ソナタ」はハ短調，「月光ソナタ」は嬰ハ短調でなければならなかった。」

また，作曲家達はたとえ交響曲であろうとピアノで作曲を行っているので，調を選ぶときに，やはり使用しているピアノの調律に影響を受けると考えるのが自然であろう。ベートーヴェンにとって交響曲第 9 番はやはりニ短調でなくてはならなかったのである。(交響曲第 9 番作曲時には，ベートーヴェンはすでに聴覚を失っていたので，頭の中で鳴り響くキルンベルガー調律で作曲したのであろうか。)

注 3. 現在でも，最新のフルコンサートグランドピアノを古典調律して演奏会が催されたり，録音されたりすることがある。ただし，調律はピアニストにとってはいわゆる『企業秘密』の部分であり公表されないことがほとんどである。そのため，実体は神秘のヴェールに覆われているのが実情であるが，唯一例外として，内田光子が，モーツァルトのソナタ全曲録音 (ロンドンのウィグモア・ホールでおこなわれたソナタ全曲演奏会 (1982 年) の大成功を受けてレコーディングされ，彼女の世界的な名声を決定づけた) をヴェルクマイスター調律で行ったことを明かにしている。また，音律研究者の平島達司氏が，所有していたレコードとヴェルクマイスターで調律したピアノを同時に弾くことによって調べたところ，イングリッド・ヘブラーが弾くモーツァルトの「トルコ行進曲」イ短調 (Philips の旧録音の方) は完全にヴェルクマイスターと一致し，バックハウス, ルービンシュタイン, コルトー, グレン・グールド, ミケランジェリのレコードがよい一致をしたと報告している [26, p. 4]。またその他にも，サンソン・フランソワ, ペライア, キーシン, ... 等，古典調律で演奏していると言われるピアニストが存在している。

V. 12 平均律音律

1636 年に，マラン・メルセンヌが確立したと言われる，現在通常使われる標準的な音律。メルセンヌの著書「普遍的調和：音楽の理論と実際」には，小数点第 7 位までを正しく計算した比の値が載せられている。(メルセンヌに至るまでの平均律音律の歴史は，[14] に詳しく述べられている。) この音律は，1 オクターブをきっちり 12 等分することにより音律を作り出している。しかし，「きっちり 12 等分」はどうすれば実現できるのであろうか？ II 準備 音程に関する計算上の注意 (2) を思い出すと，オクターブを 12 等分するには，隣合う音の振動数の比がすべて等しくなるように分けていけばよいことになる。具体的には，振動数が a と $2a$ の 2 音の間に，次のような振動数をもつ 11 個の音を入れればよい。

$$(a = 1a = 2^0 a = 2^{\frac{0}{12}} a,)\ 2^{\frac{1}{12}} a,\ 2^{\frac{2}{12}} a,\ 2^{\frac{3}{12}} a,\ 2^{\frac{4}{12}} a,\ 2^{\frac{5}{12}} a,$$
$$2^{\frac{6}{12}} a,\ 2^{\frac{7}{12}} a,\ 2^{\frac{8}{12}} a,\ 2^{\frac{9}{12}} a,\ 2^{\frac{10}{12}} a,\ 2^{\frac{11}{12}} a,\ (2^{\frac{12}{12}} a = 2^1 a = 2a)$$

本当に隣合う数の比がすべて等しくなっているか調べてみると，$n = 0, 1, 2, \ldots, 11$ に対し，

$$\frac{2^{\frac{n+1}{12}} a}{2^{\frac{n}{12}} a} = \frac{2^{\frac{n+1}{12}}}{2^{\frac{n}{12}}} = \frac{(2^{\frac{1}{12}})^{n+1}}{(2^{\frac{1}{12}})^n} = \frac{(2^{\frac{1}{12}})^n\, 2^{\frac{1}{12}}}{(2^{\frac{1}{12}})^n} = 2^{\frac{1}{12}}$$

よって，隣合う数の比はすべて $2^{\frac{1}{12}}$ に一致している。このことを別の言い方で表すと，12 平均律音律は，関数

$$f(x) = 2^x a$$

を考えるとき，閉区間 $[0,1]$ を 12 等分した数

$$0 = \tfrac{0}{12},\ \tfrac{1}{12},\ \tfrac{2}{12},\ \tfrac{3}{12},\ \tfrac{4}{12},\ \tfrac{5}{12},\ \tfrac{6}{12},\ \tfrac{7}{12},\ \tfrac{8}{12},\ \tfrac{9}{12},\ \tfrac{10}{12},\ \tfrac{11}{12},\ \tfrac{12}{12} = 1$$

を x の値として $f(x)$ に順に代入していって得られる，といえる。

このようにして作られる 12 平均律音律の特徴は，次の通りである。

1. 各音の音程の幅が一定であり，どの音の間でも同じ音程なら同じ振動数比になる。
2. 完全 1 度 (ユニゾン) と完全 8 度 (オクターブ) を除いて純正な音程は存在しない。
3. 調律し直すことなく自由に転調，移調ができる。
4. 音のうなり・濁りは，同じ音程間で等しく発生し，どの調への転調もまったく条件が同じとなる。
5. ピタゴラス音律の改良を促した長 3 度の音程は (ピタゴラス音律は約 407.82 セントであった。12 平均律はもちろん 400 セントである)，純正長 3 度 (約 386.31 セント) より大きめで，本来かなり不協和な和音になっているはずだが，2 で述べた 2 つ以外のすべての和音が不協和なので，耳障りでなく聞こえてしまう不思議な音律。

注 . 261.63 Hz の「ド」(Middle C) とその長 3 度上の「ミ」(329.63 Hz) の和音のうなりについて考えてみよう。これは，「ド」の 5 倍音 1308.13 Hz と「ミ」の 4 倍音 1318.51 Hz との間の，1 秒間に約 $1318.51 - 1308.13 \fallingdotseq 10.4$ 回のうなりである。かなり早いスピードのうなりであるので，うなりというよりもむしろ衝撃音として聴こえる。

同様に， 261.63 Hz の「ド」とその完全 5 度上の「ソ」(392.00 Hz) との間では，1 秒間に約 $261.63 \times 3 - 392.00 \times 2 \fallingdotseq 0.9$ 回のうなりが， そして「ミ」と「ソ」の間では約 $329.63 \times 6 - 392.00 \times 5 \fallingdotseq 17.8$ 回のうなりが起こる。このため，「ド・ミ・ソ」の長 3 和音はこのような 3 つのうなりがぶつかりあって聞こえてくる。

チェンバロ奏者の橋本英二氏は述べる。「多くの音楽家は慣れて気に留めないだろうが，純正調でまったくうなりがない長 3 和音を数分間聞いた後で平均律の同じ和音に接すると，驚くこと請け合いである。」([19, p. 214]) また，[20, p. 173] には，ピアノを 12 平均律音律に調律する方法が書かれているが，その途中で次のようなコメントが挿入されている。「うなりがなくなるように調律するのは興味深い作業になる場合がある。あなたは生まれて初めて完全な 3 度を聞くかもしれない。それはとても気持ちの落ち着く ‘丸い’ 響きがする。」「これでピアノ中央の長 3 和音「ド・ミ・ソ」を弾くことができるようになった。あなたはその響きがいかにひどいかに気付くかもしれない。多くの人が生まれて初めて知る思いがけない真実だ。実際，優れた音楽的な耳をもち，これまでピアノの調律を試みたことのなかった人は，この和音が本当は正しい音程であるにもかかわらず，あまりに不快に響くため，調律を誤ったと思うかもしれない。」

12 平均律音律の調律法. 12 平均律音律の調律は，オクターブ以外のすべての音をうなりを数えながら行われる。その具体的な方法はいろいろ存在するが，いちばん単純な方法は，ピタゴラス音律の作り方と同様に，5 度圏に沿って右回りに完全 5 度上を (ときどき 1 オクターブ下を調律しながら) 調律していく方法である。元の音の振動数を x Hz とするとき，調律したい完全 5 度上の音は，純正点から音をゆっくりと低くしていき，うなりが 1 秒間に

$$x \times (3 - (2^{\frac{1}{12}})^7 \times 2) \fallingdotseq 0.0033858\,x$$

回になるところに調律する。

16 世紀半ばから 19 世紀にかけて，名の通った数学者・物理学者はたいてい音律問題に首を突っ込んでおり，すでに存在する音律の弱点を克服すべく新たな音律が次々と生み出されていたことはすでに述べたとおりである。実はその過程で，結局は 12 平均律音律が最もたやすく問題を解決する手段ではないかと考える音楽理論家が増えていった。また，次々と新たに生まれてくる楽曲では，より新しい響きの探求が行われ，そのため，それまで不協和音とみなされていた響きが，時の流れとともに心地よく感じられるようになったり，逆に，それまでの協和音が単純で物足りなく感じてしまうことも起こってきていた。つまり，人々は 12 平均律音律の長 3 度の濁りに対し慢性的な不感症になりつつあり，バッハの時代のオルガニスト達が苦痛の表情をもって感じたその濁りを，何の抵抗もなく快感的なハーモニーとして受け入れる土壌ができつつあったのである。

18 世紀末のピアノ製作は全て小規模工房で，主要工房でさえ年間 20 台程度の生産量であった。しかし，イギリスで始まった産業革命の波に乗り，19 世紀に入った 1800 年代初期には，ロンドンのジョン・ブロードウッド社が年間 400 台以上，そして 1850 年代にはブロードウッド社を中心としたイギリス勢がピアノ業界で君臨し，イギリスでは年間 25,000 台のピアノが生産されるようになった。[6, p 12] そして 1842 年に，当時ピアノ製造業界のトップ企業であったジョン・ブロードウッド社が，史上初めて 12 平均律音律で調律したピアノを販売したことを契機として，ピアノが 12 平均律音律で調律されるようになった。ジョン・ブロードウッド社は，大量生産・大量販売を行うため，大量の見込み生産を行う必要があったが，それを多数存在した不等分調律法ではなく，ただ 1 種類しかなかった等分調律法（12 平均律音律）で調律することにしたのである。[25, p. 222] もはや，それぞれ異なった特徴をもつ中全音律，様々なウェル・テンペラメント，平均律音律が共存していた時代は終わった。数学者・物理学者が音律について言及することも減った。[25, p. 152] こうして，19 世紀末にはほとんどのピアノは平均律で調律されることになった。

平均律音律の和音の協和度は，純正律音律にはるかに及ばない。響きを犠牲にして，どんな転調にも耐えうる点を重視したのが平均律音律である。グスタフ・マーラー（1860 年 ～ 1911 年：ウィーンで活躍した作曲家・指揮者）は，「ミーントーンの調律がされなくなったことは西洋音楽にとって大きな損失だ。」と述べ，マックス・ウェーバー（1864 年 ～ 1920 年：ドイツの社会学者・経済学者）は著書「音楽社会学」の中で，「平均律音律は結局のところ非和声的なものであるために，聴覚の鋭敏さを著しく鈍らせる働きをする。」「歌手の訓練がほとんどすべてピアノによって行われているが，そういう方法では，純正律の楽器によって訓練するときのような精緻な聴覚が得られないことは明らかである。」と述べ，フランツ・ヴュルナー（1832 年 ～ 1902 年：ドイツの作曲者・指揮者）は，1875 年に発表した『コールユーブンゲン』（合唱のための教則本で，音楽大学の声楽学科の入学試験で課題として使われることも多い）の序文において，「本作の練習の際には初めは楽器を用いずに行い，最後に伴奏を付けるべきであるが，その際には平均律によるピアノを用いてはならない。」「平均律によるピアノを頼りにしては，正しい音程は望めない。」と述べている。しかし，平均律音律を歓迎した音楽家もたくさん存在したようで，19 世紀末には，ピアノは全面的に 12 平均律音律で調律されるようになった。

ちなみに，クロード・ドビュッシーが 12 平均律音律の特性を生かした初めての作曲家であると言われている。（自分のピアノをヴェルクマイスターで調律していた音律研究者の平島達司氏は述べている。「ドビュッシーの音楽に表れる印象派的な陰影は，平均律の和声から生まれるある種の無機的な響きを利用していると考えられます。本来なら透明に響くべき純正和音も，平均律では，

ソフト・フォーカスのようにあいまいな響きなのです。」[25, p. 49]）しかし，このことは逆に，それ以前の作曲家はすべて古典調律されたピアノを使って作曲しており，その作品の適切な解釈には古典調律の十分な理解が必要である，ということを思い出させてくれる。

平均律音律が普及して以降，作曲家達は 12 平均律音律で曲を作るようになった。その結果，その転調の自由という特性を生かし，めまぐるしい転調を伴った極めて複雑な音楽も作られるようになった。その流れはどんどん加速し，次第に調性音楽の崩壊の兆しが見え始め，20 世紀に入ると，「無調音楽」「12 音音楽」の誕生へと繋がっていく。しかし，12 平均律音律が生み出したとも言えるそうした音楽は，一般聴衆にとっては難解であり，受け入れられることはなかった。そして新作の発表は行われるが，好んで聴かれる作品は過去のもの，そして実際に演奏される曲も過去のものばかり，という状況に陥っていくことになる。平島達司氏は述べる「16, 17 世紀には多様な音律が共存し，調性音楽が栄え，次第に大規模化し色彩豊かになっていった音楽が，20 世紀に至って突然，平均律の普及に並行するようにするすると縮んでしまった感じがします。」[25, p. 156] そのため，20 世紀も半ばを過ぎてから，このような難解な音楽に疑問を呈する動きも現れ始め，再び調性的要素を作品の中に取り入れた作曲法が模索されている。

VI. 終わりに

音律はギリシャの数学者ピタゴラスによって初めて作られた。音楽学の研究者である大角欣矢氏 (東京芸術大学教授) は述べている。「ピタゴラスの考えによれば，数学的真理は，神々から天体，人間，動物，木や石に至るまで，宇宙全体にあまねく行き渡っている根本原理であった。その原理を，実際に耳に聞こえる形へと移し換えたのが鳴り響く音楽である。(中略) その響きが正しく奏でられれば，聴き手の中にも同一の共鳴を生み出すはずである。そして，宇宙を律している調和 (ハルモニア) に共鳴したとき，人間も，他の動物も，自然界の事物も，安定した最良の状態へと導かれる。」さらに，「音楽の本質的実体をなしているのは実際に耳に聞こえる音響現象という表層ではなく，むしろその響きを根底において律している数的秩序といういわば深層だ，(中略) 聞こえない音楽こそが本体であって，聞こえる音楽はその影ないし仮象にすぎない。」[5, pp.38-40] そしてこのような考え方のもとで，音楽の研究は中世に至るまで応用数学の 1 部門として行われてきた。

和声音楽の発展とともに，長 3 度の和音の協和性が重要となり，それまで君臨してきたピタゴラス音律はその協和性に問題があったため，改良が求められることになった。そして，その要望に応えるべく，数学を駆使して様々な音律が作られた。自然倍音からなる純正律，2 の 12 乗根を計算することにより得られる 12 平均律音律 (生まれたのは早かったが，普及したのは 19 世紀半ば以降であった)，そして鍵盤楽器のための様々な調律法，中全音律，ウェル・テンペラメント (ヴェルクマイスター，キルンベルガー，$\cdots$)。背景には，常に数との戦いがあった。大角欣矢氏はバッハらが活躍した 16 – 17 世紀についても次のように述べている。「バロック時代になってもなお，音楽は『数学的学問』と定義されることが通例であった。例えばライプニッツは 1712 年に，『音楽とは，魂が無意識のうちに行う隠れた計算行為である』と書いている。」[5, pp.38-40]

この 2 回の講義で，音楽の歴史に底流する数学を感じ取って頂けば幸いである。

VII. 講義に対する受講生の反応

この講義で学んだことや感じたことを自由に記述してもらったところ，下記のような意見が寄せられた。[22] では書かれてない意見を主に取り上げてみる。(括弧内は学生の所属専攻名。)

- 私たちが意識していないだけで，数学は身近なものに使われていることを知りました。（国語教育専攻）
- 数学は日常の様々なところに用いられており，音楽という分野においても数学的思考が使われる。（国語教育専攻）
- 音律の中には，高校で学ぶ数学がたくさん使われていた。（国語教育専攻）
- 数学と音楽は繋がっているだなと思った。指数関数が関係してくるとは思っていなかった。（幼稚園専攻）
- 音楽の中にも数学が隠れていることを学びました。芸術と数学が結びつくなんて考えたことがなかったので，音の調和の話も平均律音律の話もとても新鮮でした。（教育科学専攻）
- 「音楽と数学は繋がっているんよ」と音楽教諭の母がよく言っているが，その理由が少し分かったようにも思えた。これを機会に少し自分でも調べてみたいと思う。（国語教育専攻）
- 普段まったく意識していないことにも数学を利用して理論づけることが可能であり，またそれを解明しようとしている人が居ることが分かった。（教育科学専攻）
- 高校で学んだ数学が使われていることに感動しました。（教育科学専攻）
- 音楽の至る所に数学の存在がある。（教育科学専攻）
- 音楽であろうと数学をしてしまうかわった人たちが世界を前に進ませていたのだなと思いました。 (理科教育専攻)
- 音楽・数学というくくりだけではなく，そこに理科 (生物) 的な要素も含まれていて，ひとつの分野だけでなく様々な発想や知識が組み合わされて研究がなされているんだと知った。何事も狭い視野にとらわれていてはいけないなと感じた。（美術教育専攻）
- 「ちょうどいい具合に」や「心地よく感じる音」といった曖昧な言葉も，数学で美しく説明できるところがおもしろいと思った。（家政教育専攻）
- 音楽も数学も「美しさ」に貪欲だと感じた。（英語教育専攻）
- 美しいと感じるものには何か法則があって，それは数学で表せていると考えると，数学とは本当に美しい学問と言えるのではないかと思いました。（教育科学専攻）
- 数学は，美しさを求める分野にはどこにでも現れるものなのだなと感じました。 (理科教育専攻)
- 数学は近寄りがたいイメージがあったけれど，この授業で数学も少し面白いかなぁと思いました。（教育科学専攻）
- 身近なものを数学で表すとおもしろいと思いました。（英語教育専攻）
- ピアノを弾くときになんとなく感じていたもの (不協和音) が数学的に話されていて，数学ってありとあらゆるものに使用されるのだと思った。（英語教育専攻）
- 普段ピアノを弾くとき，感覚で気持ち悪い音の重なりと心地よい音の重なりを判断していたので， 今日学んだことを思い出しながら弾くと面白いかもしれないと思いました。（幼稚園専攻）

- ピアノを習っていたけれど，もちろん周波数の比のような話は学ばなかったので，音を周波数で表して，その上心地よさの解析までできることに驚いた。いろいろな和音を聴けて興味深かった。(教育科学専攻)
- 中学のときに吹奏楽部に属しており，倍音などの音楽的な知識はそれなりにあるが，それがどうして心地よかったり悪かったりするのかという根本的なことを考えたこともなく，それが数学によって分かるのだと驚いた。(教育科学専攻)
- 高校のときに吹奏楽部に入っており，和音のことについて教えられ，如何に気持ちよく響く和音を作るか考えてきました。数学の式などで考えたことはなかったので，今日の話は懐かしいとともに新鮮でもありました。でもやはり難しくて，もっと学びたいと思いました。(教育科学専攻)
- 音楽の捉え方が変わった。私もバンドしているので，何か新鮮で楽しかった。(教育科学専攻)
- 私もバンドをしていて音律などといったことに興味があったし，深くて何か自分に影響を与える話だったと思います。(教育科学専攻)
- 私は音楽をしていたので，そのときにこういったことを学んでいれば，また違った考え方で演奏できたのかなと，思いました。(国語教育専攻)
- 音楽をする人間として，音楽について関数や比や周波数などを使って考えるという発想やその内容がすごく新鮮で面白かった。(音楽教育専攻)
- ハーモニーディレクターという機械を使うと数字上ではきれいな和音が得られるのだが，確かに調をいじるのがめんどうだったことを思い出した。2 回とも興味のある話でした。(教育科学専攻)
- 自分のもっている音楽の感性を，数学で裏打ちされた。(社会教育専攻)
- 数学だけでなく音楽の知識も学ぶことができ，興味深かった。どのような音が協和していて，どのような音が不協和なのかメカニズムを知ることができた。また，様々な音律のでき方について知ることができた。(幼稚園専攻)
- 現在使われている 12 平均律音律が，昔あったいろいろな音律の和音よりもあまり美しく響かないことを初めて知りました。きれいに響いていると思っていたので，他の音律での和音の響きが知りたくなりました。(音楽教育専攻)
- 平均律音律が妥協したものだというのも面白く感じました。(教育科学専攻)
- 今まで，ピアノなど楽器を使って不協和音を聴いたとき，なぜ気持ち悪いのだろうと思っていたので，理由を学べて嬉しかったです。(国語教育専攻)
- 今まで，数学を毛嫌いしすぎていたかもしれないです。もっと身近なものの根本であることを忘れず，親近感をもって取り組みたいし，生徒たちにもそう教えたいと思いました。(幼稚園専攻)

謝辞.

声楽家の真木喜規氏にはこの論文を通読頂き，古典調律の説明について，講義で行ったものよりさらに詳しく書くべきだと提言頂きました。そのため，この授業報告は，講義を受講して興味をもった学生に対して，より詳しい専門書との橋渡しをできるものになったのではないかと思っています。感謝致します。

参考資料

[1] ニコラウス・アーノンクール，樋口隆一・許光俊訳，古楽とは何か，1997，音楽之友社

[2] オリヴィエ・アラン，和声の歴史，1969，白水社

[3] 岩宮眞一郎，ＣＤでわかる 音楽の科学，2009，ナツメ社

[4] アレクサンダー・ウッド，J.M. バウシャー改訂，石井信生訳，音楽の物理学，1976，音楽之友社

[5] 大角欣矢 (他計 10 名)，21 世紀の音楽入門，2005，教育芸術社

[6] 大木裕子，欧米のピアノメーカーの歴史–ピアノの技術革新を中心に–，京都マネジメント・レビュー (京都産業大学) 17 (2010)，1–25

[7] 小方厚，音律と音階の科学，2007，講談社

[8] ハワード・グッドール，松村哲哉訳，音楽史を変えた五つの発明，2011，白水社

[9] 黒沢隆朝，楽典 (三訂)，1979，音楽之友社

[10] ヘルベルト・ケルタート，竹内ふみ子訳，音律について 上巻，1990，シンフォニア

[11] ヘルベルト・ケルタート，竹内ふみ子訳，音律について 下巻，1999，シンフォニア

[12] 坂口博樹，音楽の不思議を解く，2010，ヤマハミュージックメディア

[13] 坂口博樹，「しくみ」から理解する楽典，2011，ヤマハミュージックメディア

[14] 坂崎紀，平均律の歴史的位置，聖徳大学音楽文化研究 1，2001

[15] 田辺尚雄，音楽音響学，1951，音楽之友社

[16] 田村和紀夫，新 名曲が語る音楽史，2008，音楽之友社

[17] 田村和紀夫, 鳴海史生，音楽史 17 の視座，2008，音楽之友社

[18] ジョン・パウエル，小野木明恵訳，響きの科学，2011，早川書房

[19] 橋本英二，バロックから初期古典派までの音楽の奏法，2005，音楽之友社

[20] ジョン・ビショップ，グレアム・バーカー，後藤泰子・元井夏彦訳，ピアノマニュアル，2010，ヤマハミュージックメディア

[21] 橋本絹代，やわらかなバッハ，2009，春秋社

[22] 馬場良始，ピタゴラス音律 – 小学校専門科目「数学」での実践 –，数学教育研究 41 (2012), 71–94.

[23] 馬場良始，ピタゴラス音律から新しい音律へ – 小学校専門科目「数学」での実践 –，数学教育研究 42 (2013), 37–59.

[24] 平島達司，グレゴリオ聖歌の音律，Bulletin of the Institute for Research of Christian Culture，No.14 (1981)，1–16.

[25] 平島達司，ゼロ・ビートの再発見，2004，ショパン

[26] 平島達司，ゼロ・ビートの再発見 技法篇，2004，ショパン

[27] 福島琢郎，ピアノの構造・調律・修理，1950，音楽之友社

[28] 溝部國光，正しい音階 (第 3 版)，1983，日本楽譜出版社

[29] ロバート・モーレイ社のクラヴィコード取扱説明書：クラヴィコードの調律と調整，野村成人訳，ムジカ・アンティカ湘南，2010

[30] ホアン G. ローダラー，高野光司・安藤四一訳，音楽の科学，1981，音楽之友社

[31] Juan G. Roederer，The physics and psychophysics of music: An introduction (Fourth edition)，2008，Springer