式指導における算数 - 数学への展開

2004-2006 年度馬場ゼミ生　三浦　勝志

は　じ　め　に

現在，文字（アルファベット）を使った式は，中学校 1 年生ではじめて学習する。中学校数学の内容の中で，中学生がこの部分でつまずくのはアルバイトの経験からも分かっているし，知り合いの現場の先生に聞いてもやはりこの部分で多くの生徒がつまずくようである。しかし，文字を使った式を理解していないと，中学校 3 年間，高校 3 年間の数学が全く分からなくなってしまうことは十分予想できることであろう。また，このことにより「数学嫌い」が出てくるとも考えられる。

本稿は，中学校における文字を使った式を正確に立てられるようにするために，小学校における式，特に□などの記号を用いた式を対象として，どのような教育内容・方法を採用することが，文字を使った式へと発展しやすいかを明らかにしようとしたものである。この研究内容を取り上げた理由は，中学生が文字を使った式につまずきやすいという一般的な傾向をもとに，その主な要因を小学校算数の式指導，特に□などの記号を用いた式の指導に問題があると捉えたからである。

目　　次

序　章
研究の目的と方法，及び研究の概要

1．研究の目的

本研究においては，中学校数学における「文字を使った式」での子どものつまずきの主な要因を，小学校算数の式指導，特に□を用いた式の指導にあると捉えている。よって，□などの記号を用いた式の教育内容を改善し，「文字を使った式」への移行がスムーズに行われるようにするための教育内容の開発を，本研究の目的とする。

2．研究の方法

以上を研究の目的におき，以下の方法で研究を行っていく。

○　式（文章題），文字における先行研究の考察
○　式（文章題），文字における文献の研究
○　実態調査

3．研究の概要

本研究の目的に対し，まず，式指導・文章題指導における現在の教育内容の問題点を明らかにした。つまり，次の 2 点を指摘した。①文章題において具体的な計算にのみ着目にしがちである，つまり，結果を求めることに重点を置き過ぎていて文章題の内容（文章題の中に含まれる関係など）について考える機会が少ない。②□を用いた式においても，逆演算によって□に入る数値を求めることに重点が置き過ぎていて，式そのものを見る機会が少ない。

次に第 2，3 章において，式に関しては式の定義・意義を，文章題に関しては文章題の構造と困難性，関係把握，（具体的）操作による関係把握，等式・「等しい」ということ，逆思考，を取り上げそれらのことについて考察し整理した。そうすることで，文章題の式化における関係把握の重要性，関係把握における（具体的）操作の有効性を示し，現在の教科書の中の文章題のみでは子どもの文章把握能力が育成できないことを指摘した。

続いて第 4 章において，記号・文字のもつ意味・意義，子どもの文字に対する認識・困難点を取り上げ，それらのことについて考察し整理した。そうすることで，□は空欄，つまり「答え（数）を入れる場所」のように使われ，子どもにもそう認識されており，変数・未知数・一般数という使い分けが不十分であることを指摘し，□以外のより文字に近い，関係を把握し式化しやすい記号（ここでは囲い文字）の採用を提案した。

この上で，第 5 章においては，学校 5 年生（163 名）を対象に行った，文章題（□以外の記号（囲い文字）の有効性）に対する認識の調査（2004.12）と，小学校 6 年生（125 名）を対象に行った，文章題（図表示と関係把握の関連性）に対する認識の調査（2004.12）の結果を報告している。この調査により，5 年生においては，□を用いた式よりも囲い文字を用いた式の方が関係を式化するのに有効である，ということが見出された。また，児童の等式についての理解に難点が見いだされた。6 年生においては，関係把握における図表示の有効性が示された。また，その中で子どもの線分図に対する認識の調査の必要が新たに出てきた。

そして最後の「研究の総括」において，以上のことをもとに，提案した一連の教育内容・方法が中学校の「文字を使った式」への移行・発展には有効であるとの結論を示している。

第１章
問題の所在

第１節　教科書における問題点

まず，教科書を比べながら算数と数学（主に中学１年生）の内容のつながりとその問題点を考察する。

１．「文字を使った式」へのつながり

「文字を使った式」では，問題文を読んでそれについて文字を使った式で表し，一般化することが学習内容の一部にある。また，×や÷の省略や法則についても学習する。ほかにも，文字式の文字の部分に具体的な数を代入し，式の値を求めることも内容に含まれている。では、算数科におけるこれらの内容へのつながりについて考察していくことにしよう。

文章題の読解力について，小学 1 年生の『たすのかな、ひくのかな』という単元〔文部科学省検定済教科書小学校算数用『しょうがくさんすう１ねん』，大阪書籍，pp 72~73〕があり，その中の例題に次のようなものがある。

（池に８羽あひるがいる絵において）４わいけにはいると、いけのあひるはなんばになりますか。

この問題は具体的であるが，この問題についての式を立て，答えを求められたとしてもはたして，

（池にいるあひるの数）＋（池に入ってくるあひるの数）＝（あひるの数の合計）

ということが理解できているか（言葉による式の表現ができないにしろ，図や絵やまたはマグネットなどで説明したり，事象をイメージしたりすることができるか）疑問が生じる。しかし，そういったことが必要である。他社の教科書ではこの部分は●を並べて考えている。

また，小学２年生の単元『かけ算（1)』・『かけ算（2)』〔文部科学省検定済教科書小学校算数用『小学算数２年下』，大阪書籍，p 20〕の中には次のような例題がある。

キャラメルを１人に７こずつ５人にくばります。ぜんぶでなんこいりますか。

これは，上と同様に，

(1人に配るキャラメルの個数) × (人数) ＝ (キャラメルの個数の合計)

ということを理解できているかが重要な点であると考える。この単元では，図（絵）でイメージさせて関係を理解させている。上の 2 つのような言葉での式の表現は，中学校数学科の教科書の中の「文字を使った式」の導入部分にも書かれているが，言葉での式の表現も様々な事象を概念的に考える際には必要であり，「文字を使った式」とのつながりに重要となってくると考える。このような言葉による式の表現は小学 4 年生の単元『式と計算』〔文部科学省検定済教科書小学校算数用『小学算数 4 年下』，大阪書籍，pp 2~3〕に初めて出てくる。例えば，

(出したお金) － (全部の代金) ＝ (おつり)

のような式である（他社の教科書では 3 年生で出てくる）。また，小学 6 年生の単元「単位量あたりの大きさ - ②速さ」〔文部科学省検定済教科書小学校算数用『小学算数 6 年上』，大阪書籍，p 67〕においても，

(速さ) ＝ (道のり) ÷ (時間)

など，言葉での式の表現が学習内容にある。この「速さ」の単元では，他社の教科書〔文部科学省検定済教科書小学校算数用『あたらしいさんすう 1』，東京書籍，pp 94~95／文部科学省検定済教科書小学校算数用『新しい算数 5 上』，東京書籍，pp 64~65／文部科学省検定済教科書小学校算数用『新しい算数 5 下』，東京書籍，p 24，p 44／文部科学省検定済教科書小学校算数用『新しい算数 6 上』，東京書籍，pp 45~49〕でも同様に言葉での式の表現が用いられている。

また×や÷の省略について，小学 5 年生の単元「わり算 - ③わり算と分数」〔文部科学省検定済教科書小学校算数用『小学算数 5 年下』，大阪書籍，p 24〕において，「わり算の商は分数で表すことができます。わられる数が分子，わる数が分母になります」とあり（ただし，ここでは自然数の範囲でのわり算である），「△÷○＝△／○」と教科書に書かれている。これ以降は具体的な計算ばかり行われるのだが，「△÷○＝△／○」ということを強調すれば，中学校数学の「文字式」における÷の省略は，文字への移行がスムーズにできれば理解できると考える。ということは，やはり□や○から文字への移行が算数から数学への移行の上で重要な点であることは確認できる。一方，算数科の内容に，×の省略に関する内容はない。また，小学 3 年生の単元「かけ算 - ②かけ算のきまり」〔文部科学省検定済教科書小学校算数用『小学算数 3 年上』，大阪書籍，p 30〕では，「＝のしるしを等号といいます」というように「＝」の名称だけで，等号をはさむ両辺の数量が等しいというこ

とにはあまり触れていない。それにもかかわらず中学 1 年生の「等式」の内容へと入ることになる。

小学 5 年生の単元「整数と小数 - ⑤計算の関係」〔文部科学省検定済教科書小学校算数用『小学算数 5 年上』，大阪書籍，p 32〕で，□を使った立式と□に入る数を求める計算が学習内容として出てくる。例題には，次のようなものがある。

色紙があります。18 まい買ったので 42 まいになりました。はじめに何まいありましたか。

この問題では初めにあった色紙の枚数を□枚とすることで，「□＋18＝42」という式を立ててそこから□に入る数を求める（□に入る数を求めることについては、方程式へのつながりの部分で考える）のだが，「□＋18」が色紙全部の枚数であることにあまり着目していない。結果的に□に入る数を求めることを目標としていて様々な事象を□や○を使った式で表すという操作が少ないことが確認できる。また，「5×□」や「○＋3」などの□や○に具体的な数を入れて計算するという操作がないことも確認できる。これは他社の教科書においても同様のことが言える。

これらの事をまとめて考えると，小学校算数の内容は具体的に考えられる（イメージできる），また考える（イメージする）が，具体的であるために一般的に考えるような部分が少ない。実際，四則計算を用いる文章題では，数による立式から答えを求めさせる問題はあるが，言葉による式を立てさせる問題はない。このため，数による立式はできてもその内容や意味を考える機会が少なくなり，中学校数学の「文字を使った式の表し方」で様々な事象を，文字を使って式に表す際にそれが理解できないということは十分考えられる。また，算数の式・計算ではすぐに 1 つの答えを出すことが多くなり，答えを出す前の式（例えば，「5×3」や「□＋2」）が何を表しているのかを考える内容がほとんどない。□や○を使って，ある数量を式で表すという操作も非常に少ないのである。これらの事などが文字式（文字を使った式）の理解を困難にしていると考える。

2．「方程式」・「関数」へのつながり

（1 次）方程式を解く際には，次の「等式の性質」をもとにして解く。

A＝Bならば， ①A＋C＝B＋C ②A－C＝B－C ③A×C＝B×C ④A÷C＝B÷C　（ただし，C≠0）

また上の①②に関しては，後に移項へと発展する。「方程式の利用」では，文字式・等式の知識を活用することが必要である。

小学 5 年生の単元「整数と小数 - ⑤計算の関係」では上に挙げた例題において，□を使って「□＋18＝42」という式を立て，そこから「42－18＝□」として□に入る数を求める。しかし，これは等式の性質を適用したものとは異なり，「初めに何枚かあって，18 枚買って 42 枚となったから，42 枚から買った分の 18 枚をひけば初めにあった枚数が求められる」というように，文章題の内容・意味から考えたり図で考えたりしている。つまり，「逆演算」で考えている。内容としては変数において条件を満たすもの（未知数）を求めるものであるが，解法に関しては 1 次方程式の解法とズレがあるように考えられる。この単元の後，様々な文章題で□を使って立式して□に入る数を求める問題が出てくるようになる。

また，小学 6 年生の単元「単位量あたりの大きさ - ②速さ」では，道のり・速さ・時間の関係について学習する。しかし，それらの関係については考えるが，計算で道のりや速さや時間の値を求めさせるのみで，同じ道のりでの速さと時間の関係など，2 つの数量の変わり方などについて考えさせる内容がほとんどない。方程式や関数において頻出の問題のうちの 1 つであるこの道のり・速さ・時間の関係についての単元であるにもかかわらず，具体的な値を計算させるにとどまっている（他社の教科書も同様）。

第 2 節　まとめ

下の図 1.1 は，算数から数学への移行・つながりを表したものである。

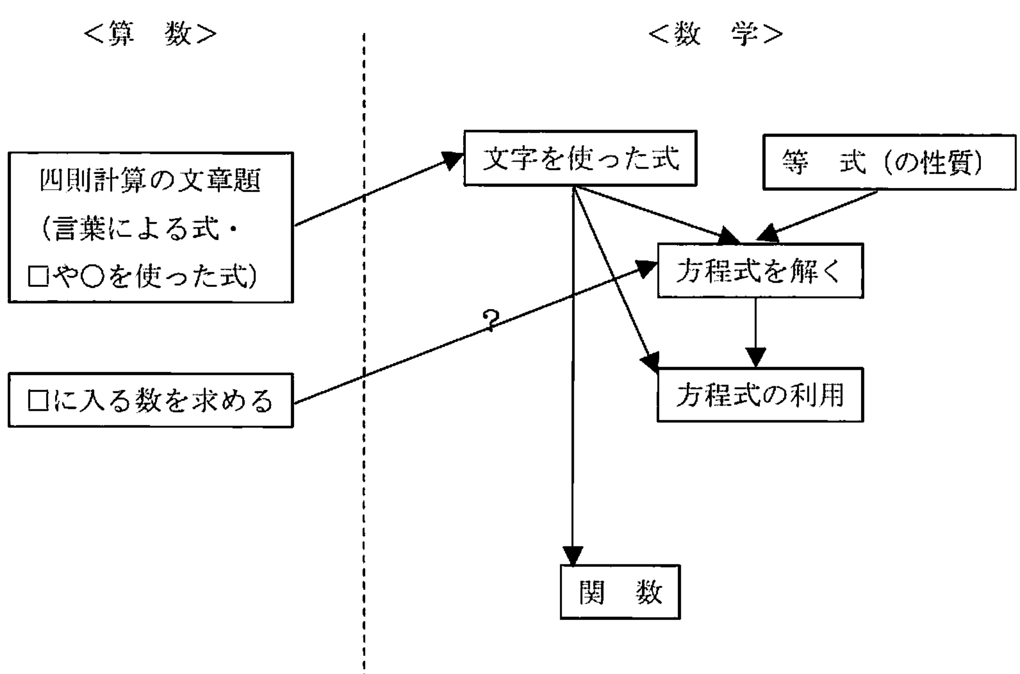


図 1.1

前述のことより，算数と数学の重要かつ大きな違いは文字を使うかどうかであると考えられる。しかし，□や○から文字への移行の困難さは，算数の内容が具体的であり，かつ具体的な計算が多いために文章題の意味など一般的・概念的なことを身につける機会が少ないことが大きな原因ではないかと考える。現在，アルファベット（文字）は中学 1 年生で学習することになっていて小学校では文字は使わずその代わりに□や○等の記号を使ってはいるが，それを用いて様々な事象を式に表し一般的に考える機会が少ない。また，事象・文章題の内容や関係を考えることも少ない。

□などの記号から文字への移行に関しては，ただ単に□から文字に移せばよいのか，また，簡単に移せるのかを研究する必要がある。

第２章
式の定義と意義

第１節　式の定義

式指導に関する研究をするにあたって,「式とは何か」を知る必要がある。そこでまずは「式」の定義（意味）について述べていく。

狭間節子氏〔片桐重男・古藤怜・平岡忠編著『最新中学校数学科指導法講座（3）新しい視点からの教材研究―数・式, 関数―』, 明治図書, 1985, pp 64~67〕によれば,「式とは, 一定の記号と一定の規則に従って並べた有限の記号の系列である。この一定の記号のなかに事物や概念を表す対象記号, 演算記号, 関係記号, カッコが含まれる」ものである。

ここで, 通常用いられている記号として次のものを考えることができる（ただし, 中学校の代数の範囲内）。

〔対象記号（数字・文字)〕
0, 1, 2, 3, … , 9, a, b, c, … , y, z
〔演算記号〕
＋, －, ×, ÷
〔カッコ〕
（ , ）

これらの記号によって式（フレーズ型）を次のように定義できる。

① 対象記号は式である。
② ＡとＢが式であれば,（Ａ＋Ｂ）,（Ａ－Ｂ）,（Ａ×Ｂ）,（Ａ÷Ｂ） は式である。
③ 以上のものだけが式である。

この定義によると, 例えば, 70, {（a ＋ b）÷ c} は式であるが,（÷70）や {x＋（×y)} は式ではない。また（□＋70）が式であるためには, 対象記号のなかに□が含められなければならない。また, 記号の中に新たに次の関係記号が加えられ, Ａ, Ｂが上記の式であれば, 次にあげるものも式である。

〔関係記号〕
＝, ＜, ＞

（Ａ＝Ｂ）,（Ａ＜Ｂ）,（Ａ＞Ｂ）

このようにして，別の式（センテンス型）を定義できる。しかし，これらのことは記号の系列の規則性のみを考えに入れるという側面から式を捉えている。

もう1つの側面に，ある式が与えられた意味をもつか，与えられた関係を表しているかで式を考えるということがある。この後者の側面が文字式の導入や式表現などでは主要なものとなり，次のことが明確に捉えられていなければならない。

① ある式で用いられている記号の1つ1つにどんな概念が対応しているか。
② 上の系列にどんな概念が対応しているか。
③ ある式がどんな意味をもつか。
④ ある式がどんな関係を表しているか。

また，そこでは，図やことばの式などが式表現の中間ステップとして有効にはたらく。

ここで，式の類型について述べていく。下の図 2.1 は式の類型についての図である。

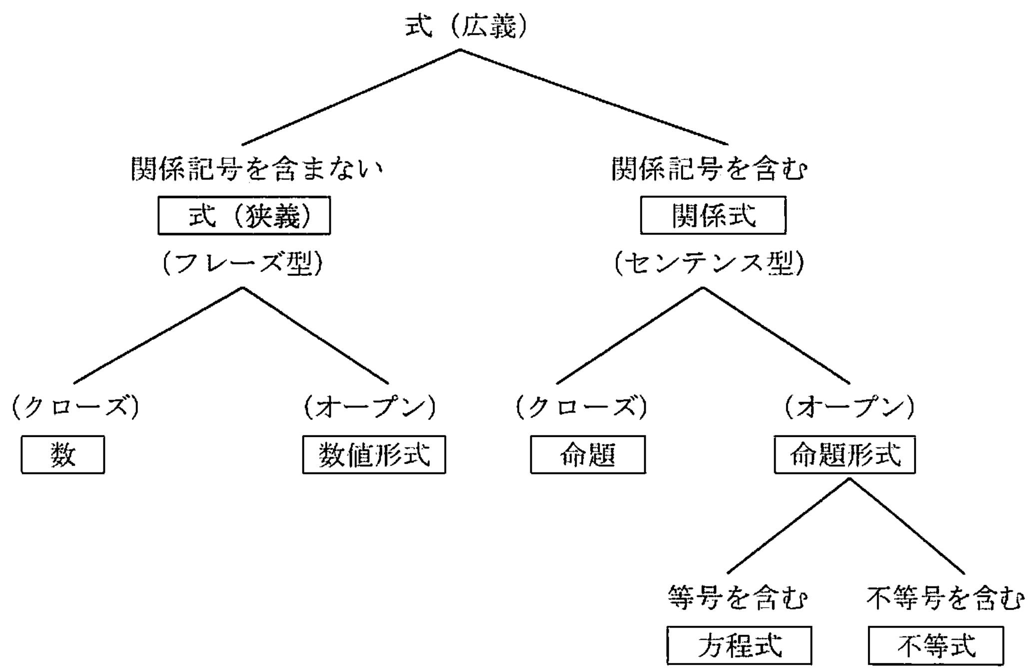


図 2.1

上の図に関して，広義の式はその中に関係記号を含まないか含むかによって，フレーズ型の式（句や項）とセンテンス型の式(文)に大別できる。フレーズ型の式を狭義の式，センテンス型の式を関係式ともいう。例えば，

3+4, (a+b), x+7　…　フレーズ型

3+4=7, (a+b)c=ac+bc, x+7<10　…　センテンス型

である。さらに，変数（文字・□）を含むか含まないかでいわゆるクローズ（代入に関して閉じている）とオープン（開いている）とに分かれ，フレーズ型とセンテンス型はそれぞれ前記の2種（クローズ，オープン）に分けられる。フレーズ型については，例えば，3+4，π などは1つの定数を表しており，x を変数とするときの x+7 や x^2-3x+2 などはこのままでは1つの定数ではないが，変数 x に一定の値を代入することによって1つの定数となりうる数値形式の例である。センテンス型については，3+4=8，(a+b)c=ac+bc などは，このままで真偽の判定ができ，命題の例である。他方，x+7<10，$x^2-3x+2=0$ などは，変数 x に一定の値を代入することによってのみ真偽の判定をすることができ，命題形式（命題関数）の例である。

第2節　式の意義

第 1 節では式の定義について述べてきたが，続いて式の意義（はたらき）について述べていく。

指導要領〔文部科学省『小学校指導要領解説　算数編』，1999，東洋館出版社，p 59〕においては，式の意義（はたらき）は次のようなものとされている。

ア）事柄や関係を簡潔，明瞭，明確に，また一般的に表すことができる。

イ）式の表す具体的な意味を離れて，形式的に処理することができる。

ウ）式から具体的な事柄や関係をよみとったり，より正確に考察したりすることができる。

エ）自分の思考過程を表現することができ，それをほかの人に的確に伝達することができる。

また，中島健三氏〔川口廷・中島健三・中野昇・原弘道　編『算数教育現代化全書（7）式表示』，金子書房，1969，pp 58~71〕は次のように捉えている。

① 式は，抽象的な数や記号を用いるので，簡潔・明確に事柄が表現され，これを他人に伝えたり，それによって思考したりするのに便利である。

② 式には，形式的に操作や処理を施すことができる。しかも，式の上での形式的[4]な操作に対応した具体的な意味を考えることができる。

この式の意義②に関して，1つ例を挙げて考える。

$$50\times3+130\times3=(50+130)\times3 \qquad \text{(分配法則)}$$

上の式の左辺は，「50円の鉛筆3本（人分）と130円のノート3冊（人分）を買って合わせたもの」に対応させて考えることができ，これを形式的に処理して得られた右辺は，「1人が50円の鉛筆と130円のノートを買うとして，その8人分を表す」ということに対応させて考えることができる。すなわち，上のような形式的な操作は，具体的事象の上でもその結果として得られる式について，初めの事象を別の観点から捉えたものとして，その意味・関係を対応させて考えられるようになっている。

このように，中島氏は式における形式的処理の便利さを述べてはいるが，操作後の式に具体的な意味を対応させて考える際には，「式を読む」という能力が必要になってくるはずである。よって，子どもが式を読めるようになってから，この意義②について感じさせるのがよいだろう。

③ 式では，ある操作を施すことを表している部分（または全体）を，その操作を施した結果を表す（1つの）もの（数）と形式的に同じにみなすことができ，その取り扱いを簡潔にすることができる。

この式の意義③に関しても，例を挙げて考える。

<円周（の長さ）を求める公式>

$\underline{\{(\text{半径})\times2\}}\times(\text{円周率}(3.14))$

↓

$\underline{(\text{直径})}\times(\text{円周率}(3.14))$

すなわち，「(半径) ×2」を「(直径)」と，1つのものと見ている。

④ 変数の記号を用いることによって，数値が知られていない要素を含む関係を式で用意に表現したり，さらに，一事例の考察から一般的な関係を推測したりまとめて表現したりすることができる。

では，これに関しても例をもとに考える。

（1）未知の量に対して記号・文字を用いる場合

未知の数量がある場合にも，それを□や x などの1つの記号・文字で表すことによって，それを含む関係式を容易に式で表わせる。すなわち，逆思考を必要とする問題でも順思考を用いて式化できるようになるのである。また，記号・文字を用いて立式

した後は形式的（機械的）な方法で未知の数量を求めることができる（これを「代数的解法」と呼ばれることもある）。

＜例＞　「リンゴがはじめに何こかありました。15 こふえたので，ぜんぶで 24 こなりました。はじめにリンゴはいくつありましたか。」

$$\square + 15 = 24$$

（2）任意の数として，文字・記号を用い，一般の場合を表わす場合

＜例＞　1 個 70 円のリンゴを□（または x）個買ったときの値段は，次の式で表わされるが，この□（または x）は特定の数に限らず，広く，0，1，2，…　を入れて考えられることを示している。

$$70 \times \square$$
$$(70 \times x)$$

すなわち，この式はそれらの個々の場合を総合して（一般化）して表しているのである。

また，次のことも式の意義（厳密にいうと立式の意義）としておく。

⑤　問題解決のための計算を指示する。

第 3 節　まとめ

式の定義は第 1 節に述べたとおりであるので，ここであえて要約はしないが，式のもつ意義についてまとめると次のようになる。

①　ある事柄の関係を明確に表現することができる。
②　形式的に処理することができる。
③　より正確に考察することができる。
④　自分の考えを他人に伝えやすい。

ここで，注目したいのは①である。②③④については，ある事柄が式化されてからのことであるが，①についてはその表現までが重要になってくる。つまり，「式表現」についての考察が重要なのである。よって，本研究でもこの点を主に考えていきたい。

第３章
文章題の式化

第１節　文章題について

１．文章題の式化への流れ〔鍋島信太郎・戸田清　監修『中学校数学教材研究講座　第６巻　問題解決』，1957，金子書房，p 52〕

国語的読み

↓

算数的読み（不必要部分を取り除く）

↓

文章題を再構成（関係を明確にし，自分なりに読みやすくする）

↓

場面を理解し，立式の方法（演算）を決定する

「国語的読み」・「算数的読み」については後で述べるが，上のような流れにおいて，分析・総合という思考操作を行うことによって，初めは漠然としていた問題がすっきりと見えてくるのである。つまり，問題の中に示されている関係把握（「関係把握」についても後で述べる）ができるのである。そして，問題の種類によって，計算・図的処理などの処理活動をすることになる。

ところが，現在の算数科の教科書中の文章題はすでに単純化・理想化されてしまっている。そのような問題は，子どもにとっては容易であり，導入の段階では分かりやすくよいとは思われるが，これでは子どもの文章題解決能力や文章把握能力は育たないのではないかと思われる。文章題の式化においては上のような流れが必要であるが，子どもの文章題解決能力の育成のためには，この流れをとれるようなやや複雑な問題も必要ではないだろうか。

２．文章題解決の困難性とその原因

文章題解決の困難性とその原因の要約は次のとおりである。

①　問題を読み取ることが困難である。
②　関係把握が困難である。
③　文字の使用に抵抗を感じ，記号のはたらきが十分理解されていない。よって，文字を使った数式表現が困難である。
④　結果の検証・確認が十分である。

このうちのいくつかについて，詳しく考えていきたい。〔同書，pp 27~28，pp 127~128〕
①については，3つの大きな原因が考えられるようである。

（a）文字や文章が読めない。
（b）言葉の意味が分からない。
（c）文の段落・脈絡が分からない。

$\}$ 読解力不足

このうちで，最も大きな影響を与えているのは（c）である。これには，「主語・述語の関係がつかめないとか，その他，関係事項の分析ができない」ということが原因と考えられるようである。次の例を見る。

コンビニにお菓子とジュースがあります。お菓子の値段は 130 円で，ジュースの値段よりも 30 円安いそうです。ジュースはいくらですか。

上の例において「安い」とあるから，これを演算の「引く」と結びつけて，

130 円－30 円＝100 円

とする，関係把握ができていない子どもが出てくることが考えられる。この問題では，主語が「お菓子」であり，述語が「130 円」と「ジュースよりも 30 円安い」との2つにかかっているというやや複雑な文章となっている。したがって，この文章の読み方としては，「お菓子の値段は 130 円です」・「そのお菓子の値段はジュースの値段よりも 30 円安いそうです」・「ジュースはいくらですか」のように考えなければならないことになる。
②について，2つの事柄について述べる。

（a）等価関係を見つけることが困難
文章題の関係把握において，子どもにとって，等価（等しい）関係を見つけることが困難であると考えられる。
（b）図により関係を把握することに慣れていない
文章題の関係把握において，図などを用いることは有効であるが，図による場面把握の練習がなされていなくては，当然，解決に困難が生じるであろう。

③については，後述する。

3．文章題の構成要素

文章題を考察するとき，その構成要素〔川口廷・中島健三・中野昇・原弘道編『算数教育現代化全書（9）問題解決』，1970，金子書房，pp 76~85〕に着目する必要がある。

（１）演算の種類・意味
（２）数量関係の構造型
（３）基礎演算の組み合わせの数と順序
（４）構成成分の表示の順序
（５）数量の種類・生活場面の背景
（６）数の種類・数の範囲

（１）演算の種類・意味〔文部科学省『小学校学習指導要領解説　算数編』，1999，p 66，pp 80~81，p 93〕

○　加法の意味
- はじめにある数量に，追加したり，それから増加したりしたときの大きさを求める場合（増加）
- 同時に存在する二つの数量を合わせた大きさを求める場合（合併）
- ある番号や順番から，さらに何番か後の番号や順番を求める場合（順序数を含む加法）

○　減法の意味
- はじめの数量の大きさから，取り去ったり減少したりしたときの残りの大きさを求める場合（求残）
- 二つの数量の差を求める場合（求差）
- ある順番から，幾つか前の順番を求める場合や，二つの順番の違いを求める場合（順序数を含む減法）

○　乗法の意味
- 一つ分の大きさが決まっているときに，その幾つ分かに当たる大きさを求める場合に用いる。つまり，同じ数を何回も加える加法，すなわち累加の簡潔な表現として乗法の表現を用いる。

○　除法の意味
- ある数量がもう一方の数量の幾つ分であるかを求める場合（包含除）
- ある数量を等分したときにできる一つ分の大きさをもとめる場合（等分除）

※　ただし，分数の乗法・除法の意味については上の意味からさらに拡張されたものとなる。

演算の種類・意味については上の通りであるが，演算の種類が同じであっても，意味・用いる場面によって難易度が違ってくることを知っておく必要がある。例えば，減法を用いる場面でも「残りを求める」場合（求残）よりも，「どれだけ多い・少ないかを求める」場合（求差）の方が，子どもたちにとっては難しいようである（詳しくは後述する）。

（2）数量関係の構造型

① A＋B＝□	④ A－B＝□	⑦ A×B＝□	⑩ A÷B＝□
② □＋A＝B	⑤ □－A＝B	⑧ □×A＝B	⑪ □÷A＝B
③ A＋□＝B	⑥ A－□＝B	⑨ A×□＝B	⑫ A÷□＝B

①④⑦⑩は順思考で解くことができ，それ以外は逆思考（「逆思考」については本章第 6 節参照）を必要とする。ただし，⑥⑫は逆思考を必要とはするが，演算に転換が起こらない特別なものである。上の構造型において考えると，やはり逆思考を必要とする構造の方が難易度が高いが，構造型だけでなく（1）の演算の意味の差異も大きく影響することを理解しておきたい。

（3）基礎演算の組み合わせの数と順序

(2) の 12 個の構造型を基礎として，これをいくつか組み合わせて 1 つの問題を構成することがある。次の例を見てみよう。

太郎君は文房具店に行き，1 本 50 円の鉛筆を 4 本買いました。その後，コンビニで 120 円のジュースを 1 本買って帰りました。太郎君はいくら使ったでしょう。

これを式に表して考えると，次の通りである。

$$\begin{cases} 50\times4=200 \\ 200+120=320 \end{cases}$$

ここでは，(2) の構造型の⑦と①を用いていることになる。このように，12 個の構造を 2 回適用して答えを求めているので，これを 2 段階の文章題ということがあるようである。当然，段階が多い文章題の方がより困難であると考えられるが，段階の数だけではなく，構造の組み合わせ方によっても難易度が変わる。例えば，同じ 2 段階の文章題であっても，上の問題のように順思考の構造を 2 回適用する文章題よりも，逆思考の構造を組み合わせた文章題の方が難易度は高いであろう。

また，文章題の段階について，構造による段階以外にも考える必要のある事柄がある。次の例を見てみる。

男の子が３人，女の子が８人います。どちらが何人多いですか。

この問題においては，２つの判断の段階がある。「どちらが多い」と「何人多い」の２つの求答事項の段階である。つまり，まず男の子と女の子のどちらが多いかを考え，そして何人多いかを考える必要があるのである。ちなみに，このような場合は，次のように別々に考えるとよい。

・　「男の子と女の子ではどちらが多いですか。」　→　女の子の方が多いことを確認した後で

・　「女の子は男の子より何人多いですか。」

このように２つに分けて考えるということを指導する必要がある。

（４）構成成分の表示の順序

次の問題を見てみよう。

１．太郎君は，お父さんからお小遣いを 250 円もらいました。貯金箱に入れたら，貯金は全部で 370 円になりました。しかし，太郎君は昨日，貯金箱から１５０円を出して，ノートを買ったそうです。それまでに貯金箱にはいくら入っていたでしょう。 ２．太郎君は昨日，貯金箱から 150 円を出して，ノートを買ったそうです。しかし，お父さんからお小遣いを 250 円もらい，貯金箱に入れたら，貯金は全部で 370 円になりました。ノートを買う前には，貯金箱にはいくら入っていたでしょう。

上の２つの問題について，(2) の構造型でいうと，どちらも，□－150＝■，■＋250＝370 を組み合わせたものである。ただし，文章表示の順序が違っているのである。つまり，問題１と２は次の順序で文章表示されているのである。

$$1.\ \begin{cases} \blacksquare + 250 = 370 \\ \square - 150 = \blacksquare \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} \square - 150 = \blacksquare \\ \blacksquare + 250 = 370 \end{cases}$$

構造型は同じであるが，問題１は文章の通りに計算を考えていけばよいのに対し，問題２は文章通りには計算していけない。このように，文章通りに計算を考えられる問題の方が容易であると考えられる。しかし，いくつかの要素が絡み，必ずしもそうとは言えない場合もあるようであるが，ここでは詳しくは省略する。

（5）数量の種類・生活場面の背景

子どもは，文章題においてその問題解決のために，どんな演算を用いるか判断をする。ところが，問題の構造型が同じでも，用いられる数量や場面が異なると，その演算判断の難易に大きな差を生ずるようである。

（6）数の種類・数の範囲

文章題に用いる数として，整数・小数・分数のどれであるかによって，文章題の難易の差が生ずるので，このことについても理解をしておく必要がある。

上のように，文章題の主な困難性，そして構造による困難性について見てきたが，やはり文章題の中に含まれる関係を見抜くことについての困難性が高いと考えられる。では，どのようにして文章題の中の関係を把握していくべきなのか。第 2 節では，そのことについて考えていく。

第2節　関係把握

第 1 節でも述べたように，文章題の式化において子どもが困難に感じているのは，文章を読んでもその意味がつかめず，その文章の内容をつかめないことや，文章からその関係・構造を把握できないことが大きな原因と考えられる。これより，その点に注目しながら式表現における子どもの思考活動ついて述べていく。

1．国語的読み・算数的読み

まず，1 つ例を見てみよう。

チョコレートが 58 個あります。このチョコレートを 7 個ずつ分けると，何人に分けられ，何個余りますか。

このような問題に出会い，この文章を読んだときに，子どもはどのように考えるのだろうか。

まずは，この文章通りの場面を想像するだろう。しかし，その後「チョコレート」という言葉は無視し，純粋に「58」と「7」という数に注目し，次のように考え，式・答えを出すことになるだろう。

「58 のなかに 7 がいくつあって，いくつ余るのだろう？『分ける』のだからわり算で求めよう」と，不要な言葉（「チョコレート」）は捨てて考えると思われる。そして，

58÷7=8 あまり 2

という式・答えを出し，その後，もう一度文章に戻り，

<u>答え　8 人に分けられて，2 個あまる</u>

という結論に到達すると考えられる。では，この例について詳しく述べていきたい。

加藤国雄氏〔横地清ほか著『算数の思考（上)』，1959，明治図書，pp 183~186〕によれば，文章題を読む際には，「国語的読み」と「算数的読み」がある。「国語的読み」とは，問題文を読んで，その場面を直接に感じ，理解し，自分自身がその場面の中に入り込んでいく過程をいう。上の例で言えば，文章題を読んで，チョコレートを含めて場面全体を想像する段階である。そして，この国語的読みによる場面は，次第に，数量とその関係以外は無視される。そして，その数量とその関係という立場から場面は一般化され，論理的に純化され，理想化されていく。この段階を「算数的読み」という。上の例で言えば，不要な言葉は捨てて，数のみに注目する段階である。そして，式を立て，計算し，答えを求めて，そして再び国語的読みに戻って，問題に対する結論を出すのである。つまり，文章題を読む際には，次のような流れで「読み」が行われるのである。

国語的読み　（場面そのものを感じ，場面に入り込む）

↓

算数的読み　（数量とその関係のみに着目）

↓※

国語的読み　（求めた数量を問題場面にあてはめる）

※　この間には，文章の再構成などが含まれる。

また，同氏によれば，算数的に読むことは次の 2 つの面からできている。これは上の例からもよみとることができるであろう。

- 不要なことば・数量を無視すること（否定的な面）
- 必要なことば・数量を重視すること（肯定的な面）

文章題における関係を理解し式化するためにはこれまでに述べてきたことが重要ではあるのだが，これにより，子どもの文章題解決能力が育成されるはずである。しかし，先にも述べたが，現在の教科書で用いられている文章題はかなり単純・理想化されていて，不必要な部分を取り除く必要があまりないので，なかなか文章題解決能力が育てられないと

考える。

ここで，1つ例を見てみる。古い報告〔同書，pp 186~187〕ではあるが，算数的読みの例としては参考になるであろう。

きぬ子さんの学級では，1月のおわりまでに学級費を8840円使いました。あとに，まだ，880円のこっています。1月のおわりまでに集まった学級費は，みんなで，いくらですか。

子どもの反応		反応率
「きぬ子さんの」	誰でもよい	100%
	なくてもよい	100%
「学級では」	いらない（学年にしてもよいから）	100%
「1月のおわり」	何月でもよい	100%
	いらない	96%
	いる	4%
「学級費を」	このままでよい	4%
	いらない（図書費などでもいい）	96%
「8840円使いました」	変えられない	100%
	ありました……わるい	
	つかった……よい	
「あとに」	いらない	100%
「まだ」	いる	92%
	いらない	8%
「880円のこっています」	変えられない	100%
「1月のおわりまでに」（後の方）	いらない	100%
「集まった学級費はいくら」	みつけること（簡単になる）	

以上のことをまとめて文章を再構成すると，次のように考えられる。

8840円使って，880円残っています。集まったのはいくらですか。

このように，「算数的読み」をすることの意義は，上の例からもうかがえるように，不要な部分を除き，必要な部分だけをまとめて考えたほうが数量の関係をつかみやすく，処理しやすい，ということであろう。これより，文章題を読むには，「算数的読み」，必要部分・

不必要部分を見分けることが重要であることが分かる。

2．言葉の意味

まず，1つの調査〔横地清ほか著『算数の思考（下)』，1962，明治図書，p 188〕を見てみる。

「よし子さんたちは8人で，記念写真をとりました。写真の代金は3枚1組で，400円，やきましは1枚につき40円です。1人当りの写真代はいくらでしょう。」（4年生・誤答率84.8%）

この誤答率の高さに対して，加藤氏〔同書，p 188〕は「子ども同士が写真屋に行って，数名一緒に写すことは皆無といってよい。その経験がないので『3枚1組400円』『やきまし1枚40円』が何のことか理解されず，読んでも具体的な事実として，条件の関係把握がむずかしく多くの誤りを生じたのである」と述べている。

また，上の問題を次のように変えると，誤答率38%に減ったようである。

「よし子さんたち8人で，班文庫を作りました。3冊1組の本を400円で買い，ほかに1冊40円の本を5冊買いました。1人がいくらずつお金を出せばよいでしょう。」

これより，文章の場面の理解（関係把握，国語的読みの段階）において，子どもの経験の有無が大きな影響を及ぼすということが分かるし，実際，文章題を読む際に，経験のない，意味の分からない言葉が出てきたとしたら，当然その問題の場面を理解することは不可能であろう。つまり，文章題においては，文章やその文章の中の言葉の意味をつかめていないといけないのである。

では，意味の分からない文章・言葉が出てきたときにはどうすればよいのだろうか。この解決法は，やはり，具体的操作による経験などにより，具体的に想像できるようにすることであろう。経験がないことから文章や言葉の意味を理解することが不可能であるのならば，それを具体的操作などにより経験させてあげれば，その意味を理解し，問題場面も理解することができるのではないかと考えられる。具体的操作による場面理解については，また後に述べる。

ここで，再び1つの調査報告〔同書，pp 193~194〕を見てみる。

調査問題

つぎの　もんだいを　とくときに　よせざん〔「たしざん」のこと〕で　するものに

は「+」，ひきざんでするものには「−」を□の中にかきなさい。

1)　よしこさんは　くりを　14 ひろいました。　かずこさんは　くりを　23 ひろいました。　みんなで　いくつでしょう。　□
2)　はなばたけに　白いはなが 12，きいろいはなが 17　さいています。　きいろいはなは　白いはなより　いくつおおいでしょう。　□
3)　あかいはなが 17 と　白いはなが 48 さいています。　あかいはなは　白いはなより　いくつすくないでしょう。　□
4)　4 と 8 をよせる〔「あわせる」と同じ意味〕と　いくつになりますか。　□
5)　きょうしつに男の子が 11 人，女の子が 7 人おります。ぜんぶで　なんにん　いるでしょう。　□
6)　14 から　5 をとると　どれだけに　なりますか。　□
7)　はるおさんは　おかあさんに　おかしを 17 いただいて　9 つたべました。　のこりは　いくつでしょう。　□
8)　あきおさんの　としは 8 つです。　ねえさんのとしは 13 です。　いくつちがうでしょう。　□
9)　4 は 12 より　いくつすくないでしょう。　□
10)　あきらくんは　13 円もっています。　よしおくんは 9 円もっています。　あきらくんは　よしおくんより　いくらおおく　もっていますか。　□
11)　かずこさんは　8 円もっています。　よしこさんは 15 円もっています。　かずこさんのおかねは　よしこさんのおかねより　いくら　すくないでしょう。　□
12)　きよこさんは　7 円もっています。　15 円の　キャラメルを　かうには　いくらたりないでしょう。　□

結果

ことば	正答率	
	2 年	3 年
ぜんぶ	73%	92%
みんなで	74	91
よせる	60	91
とる	68	90
のこり	67	85
いくつすくない	62	86
いくらすくない	63	84
いくつたりない	61	80
ちがい	51	75

いくつおおい	58	73
いくらおおい	42	65
いくらたりない	33	60

表 3.1

この結果から分かるように,「ぜんぶ,みんなで,よせる(あわせる)」という言葉では,加法であることをよく理解し,「とる」という言葉では,減法であることをよく理解していることが分かる。しかし,「いくつ・いくら～」という 2 つの数量を比較する言葉では,理解度が低くなっている。これは,問題における演算決定を,上のような単語のみに注目して考えていることも原因であると考えられる。これは,加法・減法のみでなく,乗法・除法にも言えることであろう。

文章題における演算決定において,上のような単語も重要であることは間違いないが,それのみに着目するのではなく,文章(問題)全体の構造を理解したうえで,上のような単語を念頭において演算決定すべきであると考える。そのためにも,文章題における構造・数理構造をしっかり把握する必要がある。

3.文章題における関係把握

さて,これまでに「関係把握」という言葉を数多くも用いてきたが,ここではこの「関係把握」について考えていく。

「関係把握」とは,簡単に述べてしまうと,文章(題)の場面やその中に含まれて要る関係を理解することだが,少し詳しく述べてく。

文章題において,国語的読みにより問題の場面を理解し,算数的読みにより数量やその関係のみに着目するということは前で述べたが,どちらの読みに対しても,問題の関係をつかむことが大切となってくる。つまり,文章題の場面を式に表し,答えを求めることにおいて,その関係の把握が重要となってくるのである。第 1 節にも述べたとおり,子どもが文章題を苦手にし,問題場面を式に表すことができない原因の 1 つに,この「関係の把握」ができないということがあるのは間違いないだろう。

加藤氏によれば,「関係把握」の定義は次の 2 つの事である。〔横地清ほか著『算数の思考(下)』,1962,明治図書,p 185〕

「関係把握」とは

① 問題の部分を明確にすることや,解決目標と与えられた条件とを区別すること。

② 問題場面(文章題)において,問題を構成している色々な要素を必要なものと必要でないものに区別したり,要素の間の数量的な関係を調べたりすること。

ここでいう「関係」とは，問題の中に与えられた数量関係だけでなく，問題の構造全体についての関係も含んでいる。また同氏は，「2 つ以上の事物の間に 1 つの関係があると判断することも関係ないと判断することも，どちらも，関係の判断である」と述べている（このことは，上の「関係把握」の定義②からも読み取ることができる)。これは，代数学による「関係」の定義とほぼ同様である。代数学による「関係」の定義は次の通りである。

S：集合　とする

～：S 上の関係　⇔　∀x，y∈Sに対して，x～yかそうでないかがはっきりしている

上の 2 つの例を見てみても，やはり，この関係把握が重要となってくることは言うまでもないだろう。関係把握①は問題において，〔条件・目標〕という問題の構造を明確にすることになるし，②はその問題の数量関係をつかむことにより処理がしやすく，目標に到達しやすくなる。また，算数的読みの段階で数量関係をつかむ，つまり数理構造をつかむときに，具体からの抽象化が起こるが，これは，念頭操作において重要な点であると考える。また，数量関係をつかんで式表示し，答えを求めた後に再び問題場面という具体に戻るが，こう考えてみても，文章題において，$\boxed{\text{具体}}\to\boxed{\text{抽象}}\to\boxed{\text{具体}}$　という流れが重要であることが分かる。

以上のことより，文章題・式（表現）における思考活動において，関係把握は極めて重要な位置を占めると考えられる。

第 3 節　（具体的）操作について

前節などで，文章題おける関係把握において，（具体的）操作の必要性は述べたが，本節では，この「（具体的）操作」について述べていく。

1．ブルーナーの認知発達の過程

心理学においてブルーナー（J.S.Bruner）〔J.S.ブルーナー著，田浦武雄・水越敏行　訳『教授理論の建設』，1983，黎明書房，p26〕は認知発達の過程を次の 3 段階に分けている。

（1）活動的表象の段階（enactive representation stage）
（2）映像的表象の段階（iconic representation stage）
（3）記号的表象の段階（symbolic representation stage）

これは，一般にものごとを理解していく段階と考えられている。

下図のような過程〔平岡忠著『算数授業研究 4　操作活動を生かした授業』，1984，明治

図書，p 13〕について，授業において具体的操作活動をどこにおくかということは，重要なポイントであるが，これらのことから，文章題の関係把握において（具体的）操作活動をおくことはかなり重要であることが分かる。

おはじきなどの具体物を用いた行動による操作的扱い【第１段階】

↓

○，△やテープ図などの半具体物の操作的扱い【第２段階】

↓

言葉・数字や文字・記号・式などによる表記【第３段階】

２．中原忠男氏の表現体系モデル

中原忠男氏は，このブルーナーとアメリカのレッシュ（Lesh,R）の表現体系のモデルを基に次のような表現体系のモデル〔中原忠男　編『小学校算数実践指導全集９　表現力を育てる式の指導』，1995，日本教育図書センター，p 33〕を考えている。

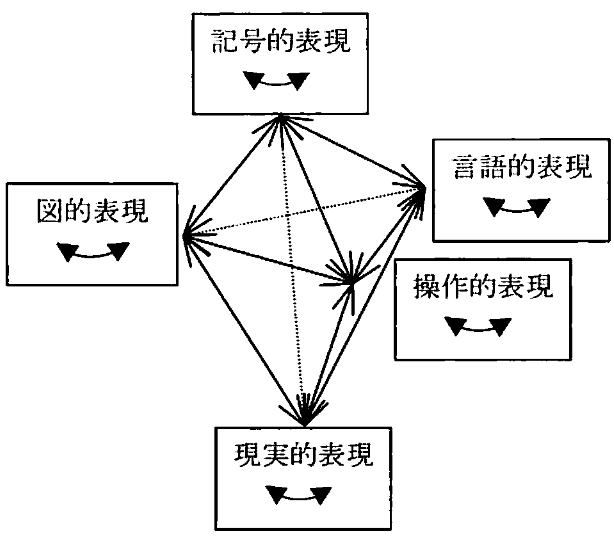


図 3.2

上の図 3.2 は，５つの表現様式の相互の変換が考えられることを表し，また同一の表現様式内でも変換が考えられることを表している。ここで，各表現様式についての説明を行う。

＜現実的表現＞　実物による表現

＜操作的表現＞　具体的な操作活動による表現，具体物や教具に動作操作を施すことによる表現
＜図的表現＞　絵，図，グラフ等による表現
＜言語的表現＞　日本では日本語による表現
＜記号的表現＞　数字，文字，演算記号，関係記号など数学的記号を用いた表現

ここで，例を引用する。〔同書，pp 186~187〕

○「１３－５＝８」の表現

＜現実的表現＞　以下のことを，実際に卵を使って示した表現
「卵が 10 個入りパック１つと，ばらで 3 個，全部で 13 個ある。これから 8 個使うと何個残るでしょう。」
10 個入りパックから 8 個使って残りが 2 個。その 2 個と 3 個を一緒にして，残りは全部で 5 個。

＜操作的表現＞　実際におはじき等を使って操作を行う。

＜図的表現＞

○○○○○　　　∅∅∅∅∅
○○○○○　　　∅∅∅○○　　　○○○○○
○○○　　　　　○○○

＜言語的表現＞　13 から 8 を引く。このとき，3 から 8 は引けないので 13 を 10 と 3 に分け，10 から 8 を引いて残りが 2 で，その 2 と 3 とを加えて答えは 5。

＜記号的表現＞

$$
\begin{aligned}
13-8 &= (10+3)-8 \\
&= (10-8)+3 \\
&= 2+3 \\
&= 5
\end{aligned}
$$

また，中原氏のモデルにおいて，他の 4 つの表現から記号的表現への矢印を「式表現」，記号的表現から他の 4 つの表現への矢印を「式を読む」と捉えることができる。

中原氏のモデルを基にして，算数教育における表現力〔同書，p 36〕を考えると，次のように捉えることができるようである。

① 算数的な概念や考えを，モデルにおける 5 つの表現のいずれを用いても適切に表現す

ることができる。

② ある表現で表された算数的な概念や考えを，他の表現様式で表わし変えることができる。

③ ある表現で表された算数的な概念や考えを，同じ表現内の他の表現方法で表わし変えることができる。

④ 上記の表現を理解することができる。

以上のことより，操作（図による操作も含める）は式化までの過程において極めて重要な位置を占めるということが分かる。

３．ピアジェによる操作

ピアジェ（J.Piaget）も心理学において「操作」という言葉を用いていたが，ピアジェのいう「操作（operation）」とはどういうものか見ていく。

ピアジェ〔J.ピアジェ 他著，赤塚徳郎・森楙 監訳『遊びと発達の心理学』，1990，黎明書房，p 12／Ｊ．ピアジェ 著，滝沢武久 訳『思考の心理学』，1976，みすず書房，pp 74~75〕は「操作とは，内面化（外側の社会規範や価値を自分の中に取り入れて，自分自身がこれに合致した規範や価値を身につけるように変化していく過程）され可逆的な，すなわち逆の方向に変えることのできる活動のことである」と操作の定義を述べている。また，思考について，「子どもの思考は，操作体系の組織化によってのみ論理的となる」と述べている。ここで，操作体系は次の全体法則に従っている。

１．合成性

ある集合の 2 つの操作は，相互に合成されて，なお，その集合の 1 つの操作を生むことができる。

２．可逆性

すべての操作は，逆にされうる。

３．零の操作

直接操作とその逆は，零の操作，または同一の操作を生む。

４．結合性

諸操作は，あらゆる仕方で，相互に結合される。

これは，代数学における「群」の構造をみたすものであり，ピアジェはこの構造を「群性体」と呼んでいる。

以上のことより，ピアジェにおける「操作」は上の 4 つの性質をみたすものであり，また，「内面化」・「思考は操作体系の組織化によってのみ論理的となる」ということから，思

考（活動）にまで発展する過程を含めて「操作」と捉えることができる。

4．指導要領における具体的操作と算数的活動

小学校算数の改善の具体的事項について，教育課程審議会の答申では，次のように述べている。〔文部科学省『小学校学習指導要領解説　算数編』，1999，p 4〕

「教育内容を厳選し，児童がゆとりをもって学ぶことの楽しさを味わいながら数量や図形についての作業的・体験的な活動など算数的活動に取り組み，数量や図形についての意味を理解し，考える力を高め，それらを活用していけるようにする。」

ここで，「算数的活動」という言葉には，「数量や図形についての作業的・体験的な活動など」という例示がついている。このように，算数的活動には具体的な活動ももちろん含まれるが，前のピアジェによる「操作」を参考にしつつ活動の意味を広く捉えれば，頭の中で数量や図形についての操作をするような，念頭での思考活動も含まれることになる。つまり，要約すると算数的活動は大きく２つの側面からなっている。

① 具体的操作などの外的な活動
② 思考活動などの内的な活動

また，「算数的活動」には次のようなものがあげられる。

① 作業的な算数的活動
　手や身体を使って，ものを作るなどの活動
② 体験的な算数的活動
　教室の内外において，各自が実際に行ったり確かめたりする活動
③ 具体物を用いた算数的活動
　身のまわりにある具体物を用いた活動
④ 調査的な算数的活動
　実態や数量などを調査する活動
⑤ 探求的な算数的活動
　概念，性質や解決方法などを見つけたり，つくり出したりする活動
⑥ 発展的な算数的活動
　学習したことを発展的に考える活動
⑦ 応用的な算数的活動
　学習したことを様々な場面に応用する活動
⑧ 総合的な算数的活動
　算数のいろいろな知識，あるいは算数や様々な学習で得た知識などを総合的に用いる活動

このように，現行の指導要領から出てきた「算数的活動」においても「具体的操作」・「思考活動」が主なものとなっている。これは，「算数における活動は作業的・体験的な活動だけで終わるものではなく，次第に具体物を用いなくなくても念頭での思考活動ができるようになってくる」ということを根拠においたものである。

5．具体的操作の意義

では，ここで具体的操作の意義について考えていく。赤井利行氏〔赤井利行著『子どもの主体性が生きる算数科授業の創造　―低学年―』，1998，学校教育研究会，pp 10~12〕はそれについて次の 6 つの観点から考えている。

①数学的概念や法則の理解の援助
②思考や判断，説明の根拠
③性質の発見，確認及びその発展
④問題解決に活用
⑤操作活動そのものが学習内容
⑥興味・関心を喚起し，活動を継続する意欲

この 6 つの意義について，同氏は次のように考えているので，例を挙げながらそれぞれについて述べていく。

① 数学的概念や法則の理解の援助

「抽象的で一般的である数学概念を理解しようとするとき，それを手助けとする具体的操作活動が考えられる。」

例えば，平行四辺形やひし形の面積を求める公式の理解において，平行四辺形やひし形を切ったりして，長方形に変えることで，その公式を理解しやすくしている。

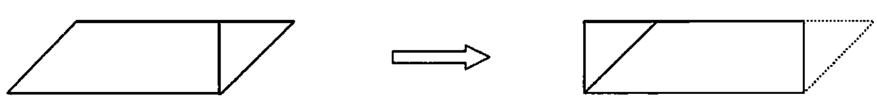


図 3.3

② 思考や判断，説明の根拠

「思考や判断，説明などの根拠を相手に理解してもらうとき，言葉を使わなければならない。しかし，子どもたちは相手に分かるように適切な言葉をなかなか使うことが

できない。そこで，具体的操作活動を相手に示すことで自分の意思を伝達する役割を担える。」

例えば，1年生の単元「繰り上げのあるたし算」において，「10」をつくる考えを用いる際に，おはじきを使って自分なりに考えたり，その考えを他の人に説明するときにおはじきを用いて説明したりする，などの事である。

③ 性質の発見，確認及びその発展

「子どもたちは，数学的な性質について，言葉で説明を受けても，なかなか理解することが困難である。しかし，具体的操作活動をする中で，性質を発見したり，確認したりすることはあまり困難でなくなる。」

図形の性質を，具体的操作によって発見・確認するのはこれにあてはまるであろう。

④ 問題解決に活用

「問題に含まれている数量の関係を捉えやすくするために，問題場面の様子を具体物で表し，操作活動を行う。この活動から数量の関係を見抜き，問題の解決の見通しをたて，解決活動にあたる。」

例えば，加減乗除の問題場面で，問題（文章）の内容をおはじきなどの具体物に置き換えて考える，などの事である。

⑤ 操作活動そのものが学習内容

「図形を平行に動かしたり，裏返したり，回転したりして新しい図形を作る操作活動がある。」

図形の敷き詰めはこれにあてはまるであろう。

⑥ 興味・関心を喚起し，活動を継続する意欲

「具体的操作活動を取り入れることで，興味・関心を呼び起こし，意欲的に活動に取り組ませることができる。さらに，活動の意欲を継続させることで，対象を発展的に考察することができる。」

以上，6つの具体的操作の意義を見てきたが，ここで注目したいのはやはり，「②思考や判断，説明の根拠」と「④問題解決に活用」であろう。ブルーナーの認知発達の段階や，上の具体的操作の意義②④からも，文章題解決，文章題の式化において（具体的）操作が必要となってくるのは分かるであろう。特に，文章題における関係把握において（具体的）操作が重要になってくると判断できる。

6．具体的操作の問題点

文章題の関係把握において，（具体的）操作を用いることが有効であることは述べたが，ここで，ピアジェの考えをもとに，操作はただ手などの身体の一部を使って行為をするだけではなく，そこから念頭操作（本稿では念頭操作を含めて思考活動としている）にまで

もっていける（発展する）ような行為と捉えるべきであると考えられることに関して，具体的操作活動における問題点（勘違い）と思われる部分について考えていく。

細呂木見良氏〔細呂木見良　著『21 世紀のための新しい算数教育の方法　―魔法の算数教育を考える―』，1992，東洋館出版社，pp 79~82〕は，このことに関して，「算数の本質は，あくまでも抽象的なものの操作にあるのであって，算数ができるようになるには，どうしても抽象的なものを理解し，その操作を克服しなければならないということになる」と述べている。つまり，文章題の式化に置き換えて述べると，関係把握において（具体的）操作を用いるのは有効であるが，その（具体的）操作のみで関係が把握できるのではなく，その操作をもとに子どもが関係・構造を頭の中で理解して初めて式化できるということになろう。また，いつまでも（具体的）操作に頼るのではなく，やがては思考操作のみ（頭の中だけ）で文章題の関係を把握し，式化できるようにするべきなのである。

（具体的）操作は，念頭操作・思考活動に発展するために有効ではあるが，所詮は算数・数学などの概念などを理解するための手助けに過ぎない，最終的には念頭操作・思考活動が重要となってくることを我々は理解しておかなければならない。

第４節　（具体的）操作による関係把握

本節では，文章題の関係把握において（具体的）操作が実際にどのような役割を果たしているのかを述べていく。

文章題の関係把握において，（具体的）操作の役割は，「問題場面の視覚化」〔横地清ほか著『算数の思考（上）』，1959，明治図書，pp 200~201〕が大きなものとなっている。ちなみに，問題場面を視覚化する方法には次のようなものがある。

- 劇化
- 具体物を用いる方法
- 絵に表す方法
- 図に表す方法（情景図，テープ図，線分図など）
- 表に表す方法

これらの方法を用いて問題の場面を視覚化することにより，ただ単に文章を読んで思考操作のみを行うよりも，場面の理解・関係把握がしやすくなると考えられる。また，（具体物を）操作することにより，問題の解決の手がかりを見つけることもできると考えられる。

ではここで，上の方法の役割とその方法の限界〔鍋島信太郎・戸田清　監修『中学校数学教材研究講座　第 6 巻　問題解決』，1957，金子書房，pp 46~48／川口廷・中島健三・中野昇・原弘道　編『算数教育現代化全書（9）問題解決』，1970，金子書房，pp 160~162〕について述べていく。

（a）劇化

問題場面を実演させることによって，その問題場面の理解を助ける。これは最も初歩的な方法である。しかし，発展性がないことと，未知数が表わせないことが欠点である。この方法は低学年にはかなり有効な方法であろう。

（b）（問題）情景図

問題場面を，具体的な図（絵）によって表現するものであり，これは最も素朴な表現であって，問題場面を理解しやすいが，劇化と同様，あまり発展性がないことと，未知数を表現しにくいことに弱点がある。

問題場面を，現実の場面に接近させるために情景図をかくと，問題場面を理解しやすい。1つ例を見てみる。

机の上にリンゴが5つあります。お母さんが，リンゴを7つ買ってきました。リンゴは全部で何個ありますか。

実際の問題としては，「机の上」・「リンゴ」などは重要な事であるが，算数的な問題としては，これらのことは不必要である。つまり，「5つ」と「7つ」ということに注目すればよいのである。ここで，初めは情景図において，より詳しく場面を把握するためにリンゴの絵をかき，やがてはリンゴの絵ではなく，○に置き換えてかいてもよいことを理解させる必要がある。これにより，「リンゴ」という不必要な条件を捨て去ることがしやすいと考えられる。初めは具体的に，絵または図をかいていくことは重要であるが，次第に必要な事柄だけを図としてかいていけばよいことを理解させるような指導を行い，線分図につなげられるようにしたい。ところで，加藤氏によれば，りんごの代わりに○を描いて考えるときに，問題におけるりんごの個数が少数個であれば問題はないのだが，りんごが何十何個というような問題では，その個数分全て○を描いても子どもにとっては見にくくなってしまい，逆に思考の邪魔となってしまう可能性もある。また，$\boxed{○\cdots\cdots○}$ といような描き方をしてしまっても，この「…」が1つの抵抗となってしまうこともあるようである。

（c）テープ図・線分図

文章問題解決のための図として代表的なものは，この線分図である。また，テープ図は情景図（○を用いる図）と線分図の中間的なものと考えるのがよい。与えられた数量を線分（の長さ）で表示するので，作図もしやすくまた量的にも関係的にも直感しやすいという利点がある。しかし，このような利点は，数量関係が和や差の範囲にとどまっているとか，あるいは，部分と全体に関するものでは著しいが，積や商の関係になるとその線分による表示は窮屈になり，必ずしも好都合とはいえない。例えば，

「25×35」となるような文章題において，下のように線分図をかくことは窮屈である。

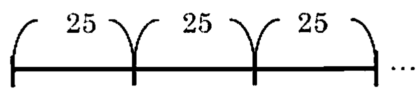


図 3.4

また，線分図はかなり抽象的な図であって，子どもにはなかなか理解しにくいという面も見られる。また，線分図をかくにあたって，線分の長さを，数値に比例して正確にかけない場合もある。この場合は，必ずしも正確にかく必要はないが，ある程度の数量的な考慮は必要である。

第５節　等式について

第 1 章で，教科書における等式についての問題点を指摘した。そこでは，小学校算数では等式についての学習はなく，等号「＝」の名称を教える程度であった。しかし，文章題の式化，特に，□を用いた式化には等式の概念を理解しておくことが必要だと考える。では，等式の概念，「等しい」ということはどういうことなのかについて考えていく。

１．等号「＝」の意味

等号の意味・使い方について，高澤茂樹氏〔中原忠男　編『小学校算数実践指導全集 9 表現力を育てる式の指導』，1995，日本教育図書センター，pp 156~157〕は次のように分類している。

① 計算の答えを書く記号として，助詞「は」のような用い方をする。すなわち，計算過程に用いられる等号
② 左右両辺は，同一のものの異なる句形の式の表現であることを示す等号
③ 異なる単位を用いてあるが，量として等しいことを示す等号
④ 2 つの異なる数値が，ある観点に立つ等しいとしてよいことを示す等号

現在，算数における等号の用い方はほとんどが①である。例えば，たし算で，「3＋5＝8（3 たす 5 は 8）」という式で用いられる。この用い方は「3＋5」の計算の結果が「8」になるということを表すものとされ，両辺が等しい数量を表していることには触れていないのである。つまり，②の用い方がされていないのが現状である。また，このことにより，次の問題では次のような誤答をしてしまう子ども出てくるようである。

電車に初めに 23 人乗っていました。駅で 12 人乗ってきました。そして，次の駅で 26 人乗ってきました。電車には何人乗っていますか。

$$23+12=35+26=61$$

<u>答え　61 人</u>

これは，等号「＝」が計算の過程・結果をつなぐ記号としてのみ認識されてしまっているために起こる間違いであると考えられる。また，等号をはさむ両辺が等しいということを認識していないのは明らかであろう。続いて，同様の問題において，次の解答を見てみる。

$$23+12+26=35+26=61$$

<u>答え　61 人</u>

この式は一見，あっているように思われるが，厳密に述べると，「A＝B＝Cとは，A＝BかつB＝Cの簡略形」ということであるので，直接「23＋12＋26＝61」を表すものとは捉えにくいので，あまりよい書き方ではないのである（実際は，当然「＝」であることはいえるのだが)。では，どのような書き方がよいのかというと，

$$\begin{aligned}23+12+26&=35+26\\&=61\end{aligned}$$

とするのがよいと考えられている。

②について，例を挙げると，

$$a+b=b+a,\ 3=2+1$$

という用い方が挙げられる。

また，③について例を挙げると，

$$1\mathrm{m}=100\mathrm{cm}$$

という用い方が挙げられる。

最後に，④について例を挙げると，

$\pi=3.14$（としてよい）

という用い方が考えられる。

このように見てみると，やはり等号は，①の用い方のみでは不十分で，②の用い方が算数にもっと必要となってくると考えられる。

2．「等しい」ということ

先ほども述べたが，計算において，次のような書き方をしてしまう子どもがいるようである。

$$5-3=2+4=6$$

また，「5−3=2」ということは，ほとんどの子どもが理解できているようであるが，「2=5−3」ということについては，子どもには理解しにくいようである。

前述はしたが，これは，等号を用いた式（等式）や「等しい」ということにおいて，子どもの理解が不十分であることが原因であると考える。また，現在の小学校算数科において，等号や「等しい」ということについて詳しく指導されていないのも事実である。

これより，「等しい」とはどういうことなのか考えていきたい。

平林一栄氏〔川口廷・中島健三・中野昇・原弘道　編『算数教育現代化全書（7）式表示』，1970，金子書房，pp 96~98〕は，「『等しい』ということの理論的な理解ではなく，『等しい』という感覚は子どもにとって重要であり，それがあってはじめて等号の学習が可能になる」と述べている。ここで，「等しい」ということを論理的な面からみていく。

（a）A＝A　（反射律）
（b）A＝B　ならば　B＝A　（対称律）
（c）A＝B　かつ　B＝C　ならば　A＝B　（推移律）

上の3つの条件を満たすものは，「同値関係」と呼ばれる。相当関係（等しい関係）は少なくともこの3つの条件は満たしているが，これ自体が相当関係を特色づけるものではないことを注意しておきたい。同氏は，「子どもがこの3つの条件を感覚的に認知し得ないとすれば，そんな子どもに等号を教えることはむだだとさえ言えないどろうか」とも述べている。つまり，子どもに「等しい」ということを理解させるためには，同値関係について，感覚的にではあるにせよ理解させる必要があるということである。

また，この3つの条件に次の4つの性質「等式の性質」を伴わせて，相当関係を特色づけられる。

A＝B　とするとき，
（d）A＋C＝B＋C

（e） A－C＝B－C
（f） A×C＝B×C
（g） A÷C＝B÷C　　（ただし，C≠0）

「等しい」ということは上の通りであるが，等式において「両辺が（数量的に）同じである」ということを，図などを用いて感覚的に子どもに理解させる必要がある。そうすることで，文章題（特に記号や文字を含むもの）を式化する際にも正確に等式が書けると考えられる。

ここで，文章題の問題場面の把握において，相当関係を見つける際に有効な手段を紹介しておく。〔鍋島信太郎・戸田清　監修『中学校数学教材研究講座　第 6 巻　問題解決』，1957，金子書房，pp 63~64〕それは，「文章の表現を変えてみる」ということである。つまり，自分の分かりやすい表現にするということである。１つ例を見てみる。

「1 本 150 円のペン 5 本と，1 冊 120 円のノートを何冊か買い，1110 円払った。ノートを何冊買いましたか。」 ↓ 「1 本 150 円のペン 5 本と 1 冊 120 円のノートを何冊分かを合わせた金額は 1110 円に等しい。」

このように，国語的読みの段階で表現を自分なりに変えるのも，場面把握，特に相当関係の理解には有効な手段であると考えられるので，指導の際には，以上のことに注意しながら指導したいものである。

第 6 節　逆思考について

1．逆思考の定義

算数の文章題の中でも，別に学習内容が設けられている「逆思考」だが，これからも分かる通り，逆思考は順思考よりも子どもにとっては困難な問題である。しかし，簡単に「逆思考」という言葉を使ってしまったが，この「逆思考」とはどのように捉えるべきなのであろうか。

式の構造から考えると，第 1 節でもあげた数量関係の構造型の中でも次のものが逆思考を必要とするものである。

② □＋A＝B　⑤ □－A＝B　⑧ □×A＝B　⑪ □÷A＝B
③ A＋□＝B　⑥ A－□＝B　⑨ A×□＝B　⑫ A÷□＝B

では，子どもの思考面から逆思考を考えていく。

文章題の解決過程において重要な事は，関係把握の定義にあるように，問題における条件と目標を明確に分け，その条件と目標の間にある関係を把握することである。加藤氏によれば〔横地清ほか　著『算数の思考（下)』，1962，明治図書，pp 223~224〕，心理的な性格に注目すると，次のことがいえるようである。

条件　…　確定的・現実的であるので，心理的には安定した性格をもっている
目標　…　非確実的・非現実的であるから心理的には不安定な性格をもっている

さらに，同氏によると，「子どもは，不安定なものより安定したものに思考の緒口を求める傾向」があり，〔条件→目標〕という思考を行いやすいようである。

ところが，上の流れで解決案が見つからなければ，子どもは困難にぶつかるが，同氏によれば，このようなときは「不安定な目標に目を向けて『この目標に行きつくには，どうすればよいか』と観点を変え」て〔目標→条件〕という思考を行うようになるようである。

ここで，同氏は「文章で示された算法を，考えられた数値に直接適用すると，うまく目的に達することができない。ここに困惑が起こる。この障碍〔「障害」のこと〕を取り除くために，求答事項から進んで（目標分析）場面の構造を変え，各要素の意味を変え，関係を裏返して，解決案を発見する過程が逆思考である」として，逆思考と定義している。

逆思考の問題では，ほとんどが文章の中の演算と答えをもとめる際の演算は異なるが，1つだけ例外があり，それは，

逆減減法　：　$A - x = B \Rightarrow x = A - B$

の構造である。1つ例をみてみる。

公園には，はじめに23人いました。何人か帰ったので公園にいる人は8人になりました。何人帰りましたか。

この問題では，文章の通りに演算を考えるとひき算であるが，問題を解決するためにもひき算が必要となる。上でも述べたように，普通は，文章の通りに考える演算と問題を解決するために使う演算は異なるが，逆減減法の構造をもつ上の問題では，文章の通りに演算をひき算と考えて問題に対して解決案をかんがえても，

$$23 - 8 = 15$$

答え　15人

というように式と答えが合うのである。しかし，子どもがこのように式と答えを書いてきたとしても，式のみからでは思考過程・関係把握が正しいのかどうかは判断しにくいのである。

2．ドゥンカーの実験から考える思考の習慣化

逆思考の問題を考える際には，文章通り・〔条件→目標〕だけを考えていてはいっこうに解決案が出てこない。観点を変える必要が出てくるのである。そのことに関して，ドゥンカー（K.Dunker）の５つの実験〔カルル・ドゥンカー　著，小見山栄一　訳『問題解決の心理—思考の実験的研究—』1955，金子書房，pp 176~180〕をみてみる。

実験１

「３本の糸を板に下げる」問題がある。

机の上にそのほかの様々の品物と一緒に２本の短いねじ釘と，検査対象である錐を置く。２つのグループＡ，Ｂに異なった条件で上の問題を課して，その結果を比較する。

＜Ａのグループ＞

板には既に穴があけられている。

＜Ｂのグループ＞

穴のあけられていない板が用意されているので，まず板に穴をあけなければならない。

「正しい解決は，第三の糸をかけるのに錐を用いることである。」

よって，１次的機能は「錐」であり，２次的機能は「糸をかけるもの」である。

Ａのグループの板は穴があいていて，Ｂのグループには穴のあいていない板が用意されているという点が違う。正解率は次の通りであった。

	被験者数	正答数
Ａグループ	10	10
Ｂグループ	14	10

実験２

「ドアに３本のローソクを目の高さに並べて立てる」問題がある。

＜Ａのグループ＞

机の上に，数個の画鋲，３つの紙箱（マッチ箱ぐらいの大きさで，色・形は少しずつ異なっているもの），ローソク，マッチの棒などを，他のものと一緒に置いておく。

＜Bのグループ＞

Aのグループで用いた3つの箱に，それぞれ，1つには画鋲を入れ，1つにはローソクをたくさん入れ，1つにはマッチの棒を入れて同じように机の上におく。

「正しい解決は，3つの箱を画鋲でドアにとめて，その上にローソクを立てることである。」

よって，1次的機能は「物を入れるもの」であり，2次的機能は「ローソク台」である。

Aのグループの箱はカラで，Bのグループにはそれぞれ必要なものが入っているという点が違う。正解率は次の通りであった。

	被験者	正答数
Aのグループ	7	7
Bのグループ	7	3

実験3

「1枚の台板（幅約20cm）を，2つの支柱の上に固着する」問題がある。

机の上に2つの「台に柱などを固着させるためもの」と，約20cmの長さの板（一方の支柱として），それに釘抜きを置く。2つのグループA，Bに異なった条件で上の問題を課して，その結果を比較する。

＜Aのグループ＞

台板と木の板は既に離されている。

＜Bのグループ＞

木の板が台板に釘付けされているので，まず釘抜きを使ってそれらを引き離さなければならない。

「正しい解決は，釘抜きを第二の支柱として使用することである。」

よって，1次的機能は「釘抜き」であり，2次的機能は「支柱」である。

Aのグループは台板と木の板が離れていて，Bのグループは台板と木の板が釘付けされているという点が違う。正解率は次の通りであった。

	被験者数	正 答 数
Aグループ	15	15
Bグループ	9	4

実験 4

「1 本の糸と錘（おもり）からなる振り子を釘にかける」問題がある。

机の上に検査対象となる錘やその他の物を置く。2 つのグループＡ，Ｂに異なった条件で上の問題を課して，その結果を比較する。

＜Ａのグループ＞

「台に柱などを固着させるためのもの」が錘として役立つようにする。

＜Ｂのグループ＞

錘は明らかに振り子の錘（糸をつけられた）として用いられるようにする。

「正しい解決は，錘（槌として）をもって釘を壁に打ち込むことである。」

よって，1 次的機能は「振り子の錘」であり，2 次的機能は「槌」である。

正解率は次の通りであった。

	被験者数	正 答 数
Ａグループ	12	12
Ｂグループ	12	9

実験 5

「4 枚の黒い正方形をつけた 1 枚の白いボール紙を低い天井の穴にかける」問題がある。

机の上にクリップ，その他を置く。2 つのグループＡ，Ｂに異なった条件で上の問題を課して，その結果を比較する。

＜Ａのグループ＞

4 枚の黒い正方形が既に白のボール紙に附着しておく。

＜Ｂのグループ＞

4 枚の黒い正方形が前もってクリップによって白のボール紙につけられている。

「正しい解決は，1 本のクリップを一端が穴に、他端がボール紙に通るように曲げること」である。

よって，1 次的機能は「何かをとめるもの」であり，2 次的機能は「鉤」である。

Ａのグループは既に 4 枚の黒い正方形が既に白のボール紙に附着してあり，Ｂのグループは 4 枚の黒い正方形が前もってクリップによって白のボール紙につけられているという点が違う。正解率は次の通りであった。

	被験者数	正 答 数
Ａグループ	7	6
Ｂグループ	7	4

ここで，実験 1 の解説をする。Aグループは既に板に穴があけられているので，錐を本来の機能である「穴をあけるもの」として使用する必要がないのである。よって，錐の別の使用方法を考えることに障害がなく，そのために被験者全員が「糸をかけるもの」として錐を使用することができた。それに対して，Bグループはまずは錐を「穴をあけるもの」として使用しなければならなく，そのために錐には本来の機能があてはめられてしまい，「糸をかけるもの」という別の使用方法が考えにくくなってしまい，被験者 14 人中 4 人が正解できないという結果が出たようである。

他の 4 つの実験についても同様のことがいえるが，以上の結果から次のように判断できる。

1 つの事物ついて，1 つの意味・機能を固定させてしまうと，別の意味・機能は念頭にうかびにくくなる。

逆思考の問題にこれを置き換えると，順思考の問題を，関係をきちんと把握しないで，文章のみから機械的に式にするということを繰り返していると，子どもの思考が習慣化してしまい，別の問題場面でも 1 つの事物（事象）について 1 つの意味しか考えられなくなり，その事物（事象）についての様々な思考，自由な思考が閉ざされてしまう可能性が十分に考えられる。すなわち，逆思考が困難となってくると考えられるのである。

では，このことに関する対策などはないのであろうか。図などを用いて，文章題の中の関係を明確に把握することが，対策としてよいのではないかと予想はできるが，詳しくは次のことをみていく。

3．基底構造

1 つの例を考える。

太郎君は初めにいくらか持っていました。お父さんに 350 円もらったので，太郎君の持っているお金は 780 円になりました。太郎君は初めにいくら持っていましたか。

上の問題は，文章では直接はたし算を示している。しかし，解決にはたし算ではなく，ひき算を用いる必要がある。つまり，「別の観点から見直す」必要があるのである。

では，加藤氏による思考過程の分析〔横地清ほか　著『算数の思考（上)』，1959，明治図書，pp 193~196〕をもとにして，上の問題について考えていく。

① 問題を読んで，現象そのものを認識する。

② 場面を数理的に純化する。

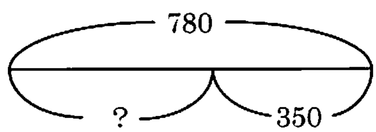
いくらか持っていた … はじめのお金

350円もらう … たす

780円 … 全部（今のお金）

③ 図などを用いて，本質的関係を見つける。

780	
？	350



上の図のような構造が見つけられる。

④ ③の構造の「？」を目標として，各要素の意味が変わり，下のような式化が起こる。

780－350＝？

⑤ 計算「780－350」を実施する。

⑥ 答えが正しいかどうか確かめる。

上の②は，「？＋350」ができないという，子どもが困難にぶつかる場面であろう。その原因は「？」の部分には具体的な数値がないためであると考えられる。

③の過程においては，時間的に移り変わる現象（？→，350→，780）を同時的に認識することが必要であり，「たす前」・「たした後」という時間の移り変わりを無視する。このような，同時的な関係を「基底構造」というようである。また，同氏によれば，「基底構造では個々の要素の意味は消える」ようである。そして，基底構造では，「要素の固有の性質は消えてしまうので，見方によって，それぞれの要素にいろいろな意味をつけることができる」と述べている。このことを，上の例でみてみる。上の例の③の過程においては，

- 780－350＝？
- ？＝780－350
- 350＝780－？
- 780－？＝350

と，③の図によって，②の過程（？＋350＝780）とは別の解釈をすることができる。ここでは，例えば「350」は，ひく数となったり，残りとなったりするのである。つまり，構造・関係の変換を行っているのである。

前述の，ドゥンカー5つの実験による1次的機能・2次的機能の話に戻るが，このドゥンカーの実験結果とその結論について述べたことをもとにして考えても，②の過程で止まってしまっては，問題を解決するのに必要な意味の転換ができない。よって，基底構造をつかみ，要素の意味を捨て去ることは逆思考の解決過程において極めて重要であることが分かる。同氏によると，④の段階を過ぎると，後は大きな障害は存在しないようである。やはり，③の段階が困難であり，かつ重要なのであろう。

ところが，逆思考の問題では，③のような図示までもが困難であるようである。この原因について同氏は，「未知のものを，決まった長さの線分で表すことに障害があると判断される。そのわけは，数量の大きさ・関係が同一の 2 つの場面で，異なる点は，順思考の場合は“既定量を決まった線分で表すこと”に対し，逆思考の場合は“未知量を決まった線分で表す”ということだけであるから」と述べている。こう考えてしまうと，逆思考の問題解決の過程において図示することは有効な手段でないように感じてしまうが，このことについては，「線分は，たとえ未知量を表すと約束されても一度書かれれば，感覚的に把握できるので，それがあたかも実際に存在するかのような気持ちで操作できるようになる」と述べられている。

結局，逆思考においても（図などの操作による）関係把握が重要であることが分かる。

第7節　まとめ

第 3 章は文章題について述べてきたが，文章題の式化には，文章の中に含まれる関係を明確に把握すること（「関係把握」）が重要であることを改めて述べておきたい。それは，未知数を含む文章題であっても例外ではない。また，その関係把握には図などの（具体的）操作が有効であることが分かった。しかし，（具体的）操作のみに頼るのは問題であり，関係を念頭（思考の中）で把握することが最終目標であり，最重要であることは注意しておきたい。

また，現在の算数の学習内容では，上に挙げた関係把握の能力を育成することは完全には難しく，学習内容の見直しが必要であると考える。加えて，等式についての理解も子どもには必要であるので，この部分についても学習内容の見直しが必要であろう。

第4章
文字（を使った）式への移行

第1節　文字の意味と意義

1．文字の意味

第 1 章でも述べたが，小学校算数と数学との大きな違いの 1 つは，文字（アルファベット）を用いるようになるということである。

□などの記号や文字の用い方・意味は，一般的には，次の 3 つがいわれるようである。

- 未知数
- 変数
- 任意（一般）数

ここで，もっと細かく詳しく文字の意味について考えていく。森田俊雄氏〔片桐重男・古藤怜・平岡忠編著『最新中学校数学科指導法講座 (3) 新しい視点からの教材研究　―数・式・関数―』，1985，明治図書，pp 56~59〕は，次のように□や文字の意味を分類している。

① プレイスホルダー（place holder）としての文字

これは，ある集合Xの要素を代入することが許されている場所であることを意味している。

② 数・量の関係を表すことばのなかで対象を示す文字

例えば，「1 個 a 円の消しゴムを～」というような文章題で用いられる□や文字のことである。

③ 未知の定数を表す文字

例えば，一次方程式 $3x+12=0$ の x のことである

④ 既知の定数を表す文字

例えば，「π」がこれにあたる。

⑤ 数や量の性質を示すための文字

例えば，三平方の定理で「ＡＢ＝a，ＢＣ＝b，ＣＡ＝c，$\angle ACB=90^\circ$ である直角三角形ＡＢＣにおいて，$a^2=b^2+c^2$」という数量の関係を文字で表したもの。

⑥ 数の処理手続きを示すのに用いられる文字

例えば分数の乗法でみれば，$\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=\frac{b\times d}{a\times c}$ のように「分数に分数をかけるには，分母と分母の積を分母とし，分子と分子の積を分子とする分数をつくればよい」というこ

とを記号化して表現したものである。

⑦ 変化する数を表す文字

例えば，一次関数 $y=2x$ の x や y である。

⑧ 考えている対象の数量を代表する文字

ここでは，変数の意味的側面に注目することにする。例えば，サイコロの平行な面にある目の数を m，n とすると m と n の間には，$m+n=7$ という関係がある。この場面の中で，$m+n=7$ という式をみたとき，われわれはサイコロの平行な面にある目の数を m，n は表しているな，という m，n の意味を即座に了解している。

続いて，上で出てきた「place holder」，そして，□や文字の主な意味である「変数」・「未知数」について考察する。

まずは，次を見てほしい。

$$a+b=b+a \qquad (a, b \in \{\text{整数の集合}\})$$

これは，整数の交換法則を示し，文字 a，b は整数であれば何でもよいことを示している。中島健三氏〔川口廷・中島健三・中野昇・原弘道編『算数教育現代化全書（7）式表示』，1970，金子書房，pp 59~60〕が「a，b などの文字は，いわば 1 つの集合で決められる『一般』を 1 つの『個』によって代表しているのである」と述べるように，a，b は整数全体の代表（元）と考えることができる。また，この文字 a，b は整数，つまり定められた範囲の数であれば，どの数でもそこへ入れてもよい場所を示す記号，つまり「数を入れる場所」と捉えることもできる。この意味で，「place holder」という言い方が用いられるようである。同氏によれば，「文字は一般に，特定の数だけを表すのではなく，色々な数をとりうるものという意味で，『変数』という言葉が用いられることができる」ようである。

また，未知数と変数について，次の場合に用いられる記号・文字は「未知数」とよばれる。

「10 は 4 と□です。」の□

「$2x+3=5$」の x

しかし，上の記号・文字が変数とされることも多いようである。このことを詳しく考えるために，変数と未知数の違いを考察していく。

平林一栄氏〔同書，pp 84~86〕によると，次のように「変数」・「定数」を分類している。

変数 … その文字の変域に含まれている元（数）の個数が 2 つ以上

定数 … その文字の変域に含まれている元（数）の個数が 1 つ

この分類から考えると，未知数は「未知の定数」ともいえるように，そこに入る数は 1 つであり，そう考えると，前のものはやはり未知数というべきではないかと考えてしまうが，少し別の観点からも考察してみる。

内海庄三氏〔大野清四郎・川口廷・中野昇・原弘道編著『中学校数学教育現代化全書 (4) 方程式・不等式』，1970，金子書房，pp 99~100〕の文字の見方についての考えが参考になるのでみてみることにする。

① 文字は未知数を表し，方程式は未知数を求める手段であるとみる見方

未知数は「未知の（一）定数」を表すとも考えられているが，二次方程式

$$x^2-9x+20=0$$

では，この x を未知数，つまり「未知の（一）定数」と考えてしまうと，答えが「2 でも 3 でもある」では矛盾が起こってしまう。なぜなら，（一）定数と考えていると，あてはまる数が 2 つとなることはありえてはいけなくなってしまうからである。

このように考えると，この①の見方は結局，一元一次方程式と連立一次方程式という極めて狭い範囲でしかあてはまらなくなってしまう。

② 文字は変数を表し，方程式は変数に対する条件文，すなわち命題関数を表すとみる見方

条件文（条件式）は，その中の文字にあてはまる値によって成立するかしないか（真偽）が分かる。この意味で，「命題関数」とも考えられているようである。ここで，命題関数とは，変数 x を含み，x にあてはまる値を決めると真偽を判定できる文をいう。例えば，

$$2x+5=9 \quad \text{において，}$$
$$\begin{cases} x \text{ に } 2 \text{ を入れると真となる。} \\ x \text{ に } 3 \text{ を入れると偽になる。} \end{cases}$$

ということである。つまり，一次方程式であってもいろいろな数を入れることはできると考えられるのである。

このようにして，一次方程式や連立一次方程式なども命題関数とみることで，これらの式における x などの文字もいろいろな数を入れることができ，この x は変数であると考えることもできるのである。

記号・文字の意味について考察してきたが，以上のことより，記号・文字（特に変数・未知数としての文字）は観点によって意味が多少異なることが分かる。

2．文字の意義

文字の意味に続いて，ここでは，文字を用いる意義について考えていく。

平林氏は，文字を用いる意義について次のように述べている。〔川口廷・中島健三・中野昇・原弘道編『算数教育現代化全書（7）式表示』，1970，金子書房，pp 116~117〕

① ことばの式から，□，△さらにはa，xへ移行したことのねらいは，意味からの離脱である。ことばのように，固有の意味をもった記号から，アルファベットのような無意味な記号に移ることによって，最初にとらえた数量関係の一般的な解釈を得たり，また，より広範な利用が可能になったりする。

＜例＞　（1人分）×（人数）＝（全部）

- お菓子や果物などの個数についての問題
- 金額についての問題

などにしか使えない。

↓

$$a \times b = c$$

他のこと，例えば，面積や速さについての問題にも適用できるようになる。つまり，これらが同様の関数関係を持つということを発見できるのである。

しかし，文章題を式化する段階においては，いくら文字を使うといえども，その文字の持つ意味（その文字が何を表わすのか）を無視することはできない。つまり，関係を適切に考えるには，文字はことば（の式）の簡略化と考える必要も十分にあると思われる。

② ある特定の事態で看取された関係が，文字式で表記されうることによって，はじめて様々な事態において解釈される可能性が生まれ，それによって思考の範囲は著しく拡大される。また，日本語表現よりも文字の式の表現の方が思考操作・変形操作がおこないやすい。

＜例＞「1個a円のリンゴをb個買い，それをc円のかごに入れてもらうと合計d円になる。」

↓

$$ab + c = d$$

↓

$$c = d - ab$$

上のように文字を使った式の方が，思考が広がるのである。

以上が，同氏が考える文字を用いる意義であるが，この文字を用いることのよさを子どもたちに伝える必要があるであろう。

また，上の 2 つの意義は，厳密にいうと文字を用いて式化した後に出てくるものであると考えられる。上でも少し述べたが，文字を含む文章題を式化することは，別の観点から文字の意義をみる必要もあるであろう。

第２節　子どもの文字に対する認識

１．子どもの文字に対する認識

第 1 節で文字の意味については述べたが，では実際に子どもは，□などの記号や文字をどのように認識しているのであろうか。

杜威の研究〔杜威著『学校数学における文字式の学習に関する研究―数の世界から文字の世界へ―』，1991，東洋館出版社，pp 84~86〕によれば，子どもは次のように文字を認識しているようである。

（1）プレースホルダーとして使われる文字
（2）物として使われる文字
（3）定数として使われる文字
（4）未知数として使われる文字
（5）変数として使われる文字

ここで，(2) の「物として使われる文字」とはどのようなものかというと，同氏は，「例えば，a＋a＋a＋a＋a を扱うとき，文字 a が 5 つあるから，その計算の結果を 5a にしたり，a^5 にしたりする場合，文字式における＋，－，×，冪の意味なども関わってくるが，文字そのものに関しては，やはり物として読み取っている」と考えている。

杜威があげるこの 5 つの認識において，子どもがどの場面で (1) ～ (5) のうちのどれを認識しているのかが重要になってくると思われるが，このことについては今後の課題としておく。

２．文字・文字式における子どもの困難点

子どもにとって，具体的な数値のみの立式よりも，文字を含めた立式のほうが困難であることは周知のとおりであろう。では，その困難点はどこにあるのであろうか。

このような原因は，

① 文字を用いる基礎的な表現ができないこと。
② 未知数と既知数とを同一に考えた式表現に抵抗を感じること。
③ 文字を含む式表現は，数値のそれのように1つの数値にまとまらないこと。
④ 文字使用に慣れないこと。

であると考えられているようである。〔鍋島信太郎・戸田清　監修『中学校数学教材研究講座　第6巻　問題解決』，1957，金子書房，p 92〕

ここで④について考えると，中学校数学での文字式への移行がスムーズに行われるためには，□や○だけでなく，文字（アルファベット）に近い記号を用いる必要もあるのではないだろうか。つまり，□や○では文字の代わり，文字の導入段階とは少し考えにくいということである。このことに関しては後述する。

ところで，丸山保氏〔国宗進 編著『中学校数学科・新しい授業づくり 5　確かな理解をめざした文字式の学習指導』，1997，明治図書，p 44〕によれば，「文字の導入段階として，□，△，○を扱うことがプラスになるのは変数的な見方や関数的な見方が強化されること」であるようである。しかし現在，□についてはほぼ place holder としての見方しか指導されていないことが多いようだが。

また田口孝雄氏は文字式についての指導における子どもの困難点として，次のことをあげている。〔同書，p 43〕

・ 5×□というような phrase（フレーズ）型の式表示を一つの数量の大きさを表す式として認識することが難しい。
・ □や○あるいは文字を使って式に表す必要感に乏しく，それを使うよさが理解されない。
・ □や○を，数をあてはめる場所（place－holder）として考えているが，それを未知数としてみたり，変数としてみたりする見方が十分でない。
・ より具体的な数値を求める傾向にあり，□や○，文字を使うことへの抵抗がある。特に，文字を具体的な数値の代表としてみることへのとまどいが強い。

やはり，この合計8つの点に注意しながら指導する必要があるだろう。特に，「文字の意味（使い方）」と「具体的数値と文字の関わり方」に重点を置いて考えていくべきであると考える。

ではここで，□などの記号の問題点について考察する。

□などの記号は，小学校1年生から既に用いられている。例えば，

□にはいるかずをいれなさい。
3＋5＝□

などというような使い方がされているのである。これによって，「□は数の入る場所だ」ということが無意識のうちに子どもたちの中に入り込んでいくと思われる。もっといってしまうと，「□は答えを書き込む空欄だ」とさえ考える子どももいるであろう。そして，この意識が根強く残ってしまう可能性もあると考えられる。また，前述のように，小学校算数では，□は place holder としての用い方が多く，子どもたちはこの使い方に慣れてしまっている上に，田口氏の述べるとおり，変数や未知数としての用い方が十分に指導されていない。ここで，再びドゥンカーの実験の結果について取り上げる。

1つの事物ついて，1つの意味・機能を固定させてしまうと，別の意味・機能は念頭にうかびにくくなる。

このことからも，□などの記号を未知数，もっというと，1つの数と見ることは困難であると考えられる。つまり，変数・未知数□を含む文章題において，□に入る数を求めるのは最終目標であるにもかかわらず，立式の段階でそう考えてしまうと考えられるのである。

よって，□などの記号を文字への導入だと簡単に考えてしまうのは問題がある。また，それらの記号を文字の導入段階に位置づけさせるためには，□などの記号の用いる教育内容の見直しが必要であると考える。

第3節　代数的思考

まず，代数的思考とは何かというと，次のことをいう。〔横地清ほか著『算数の思考（上）』，1959，明治図書，p 224〕

代数的思考の特徴は，数量の代わりに，他の記号（文字）を用いて，式を表現し，そのような式を操作することにある

小学校算数では，□自体を操作することはないが，未知数を□で表し式化することからこれも代数的思考といってよいであろう。

前で，関係把握における図表示の重要性は述べたが，それは記号（□）や文字を使った立式においても同様であろう。しかし，「未知数 x（□）に対する感覚，親近感，経験等の不足から他の数と同じく『数を表すもの』として取り扱うことが困難」であることを，加藤氏は指摘している。〔同書，p 227〕また，「立式の場合，未知であるものを既知であると考えることに成功すれば，式の記述は順思考の活動であるが，ここで，最も困難なのは，

$\boxed{\text{未知＝既知}}$ という衝突にある」とも述べている。〔同書，p 230〕確かに，記号や文字を用いない場合の立式がきちんと理解できている子どもにとっては，記号や文字を「他の数と同じである」と考えることができれば，代数的思考にも困難はないと考えられる。しかし，やはり前述の通り，いきなり記号や文字を他の数と同じように扱うことには抵抗があるであろう。不安定なものを安定なものとして考えなければならないのだから。

前述したが，特に記号□においては「数を入れる場所」という意識がはたらくので，数と同じように扱うのは特に困難であると考える。文字を使ったほうがまだ扱いやすいのではないだろうか。しかし，文字を他の数と同様に扱うにしても，かなり強い意識付けが必要であると考える。ただ，このことが可能になれば，文字を使った立式の理解度は高くなる，すなわち代数的思考が可能になるであろう。

第４節　文字・文字式への移行

まず，「ことばの式」について考える。例えば，

（たて（の長さ））×（よこ（の長さ））＝（長方形の面積）
（長方形の面積）＝（たて（の長さ））×（よこ（の長さ））

ということばの式において，これは「たての長さとよこの長さをかけると長方形の面積になる（長方形の面積はたての長さとよこの長さの積により値が出る）」という言葉による説明を簡単に表したものであると考えることができる。この式は，面積を計算するときにしか使えないが，それゆえにひとつひとつが意味を持っているので，子どもには式の持つ意味が理解しやすく，また式による関係把握がしやすいであろう。また，数についての一般性もある。つまり，整数だけでなく，小数や分数においても適用することができるのである。

また，中島氏〔川口廷・中島健三・中野昇・原弘道　編『算数教育現代化全書（7）式表示』，1970，金子書房，p 56〕は，「ことばの式は，いわば，それを通して加法・乗法などの算法の（実用的な）意味を逐次一般化するのに役立てるとともに，加法・乗法という（抽象的な）算法を実際に適用するにあたって，その媒介としての役割を果たさせることをねらったものである」と述べている。これをもとに考えると，ことばの式は，「ある事象における計算方法を指示するもの」とも捉えることができる。

この「ことばの式」を「記号・文字を使った式」に発展させることにおいて，平林氏が文字の意義で述べていたように，「意味からの離脱」がその利点であることは忘れてはならないが，やはり第１段階としては，意味を残したまま「ことばの式」から「記号・文字を使った式」へ発展させるべきであると考える。そうすることで，記号・文字を使った式が何を表しているか理解しやすく，関係把握がしやすいと考えられるからである。その方が，

立式もしやすいであろう。「意味からの離脱」はひとまず置いといて，「記号・文字を使った式」は「ことばの式」の簡略化と捉えることも重要であると考える。

上のことに関して例を挙げると，「ペンの本数と金額」の問題に対して，

（ペン１本の値段）×（本数）＝（代金）

⇩※

値　×　へ　＝　代

⇩

a　×　b　＝　c

（ここで，値は「ペン１本の値段」，へは「ペンの本数」，代は「合計の代金」を表すものとする。）

のような流れで，あえて□を使わずに立式していったほうがよいのではないかと考える。つまり，上の※の段階を小学校算数で徹底しておくのがよいと考える。□などの記号を使って立式する段階は，※の後の段階におくべきではないかと考える。先ほども述べたが，このように□以外の記号（より文字に近いもの）を用いることをすすめるのは，関係把握を重要視することと，小学１年生から□を用いていてその使い方に問題があると考えるからである。

最後に，□などの記号や，または先程述べた，より文字に近い記号を用いた立式（文章題の式化）における指導のポイントをあげておく。

□などの記号を用いた立式の段階では，□を数そのものと見させる必要が出てくる。例えば，□円持っていて，50円使うと，残りは（□－50）円であり，残りが100円のときは，□は150円で，「□＝150」と書くが，「□－50」と立式する段階では，この□は数の入る場所というより，□自身が（はじめの金額を表す）数であるという意識をもつ必要があるのである。よって，立式の段階では，□などの記号や文字を数そのものという見方にまで育てる必要があると考える。

また，（□－50）が１つの数として扱えるように指導することも重要である。これによって，（□－50）が残りの金額を表わすことを捉えやすくなるであろうし，また，具体的に初めに持っていた金額を何円かに決めると，その式が整理できることを理解できるようになり，変数・代入について理解が深まると思われる。

第５節　まとめ

□などの記号や文字の意味・意義，そして記号・文字に対する認識などについて述べてきたが，大きな問題点はやはり，□などの記号の用い方である。既に述べたように，小学

校算数の教科書（特に，1，2 年生）においては，□は空欄の様な用い方がされているのである。また，□を用いて立式する学習に対しても，立式の段階ではなく立式後の，逆演算によって□に入る数を求める，ということが重要視されている。このため，子どもは□を「答え（数）をうめる場所」と認識していると考えられる。

また，文章題における関係把握をきちんと行い，その関係に□を 1 つの数とみてあてはめていく指導内容が薄いと思われる。□を未知数，変数，もしくは（ある変域における）代表元であるとみる機会が少ないと考えられるのである。

よって，上の問題点の改善のために，□以外の，より文字に近い記号，関係を把握し式化しやすい記号，ここでは「囲い文字」の採用を提案する。

第 5 章では，それに関する認識調査について述べ，考察していく。

第５章
認識調査

第１節　調査の内容と目的

今回，奈良県下のＡ小学校（全児童数：約 910 名）の５年生 163 名，６年生 125 名を対象に認識調査を行った（2004.12)。

５年生においては，記号を用いた立式における□や○などの記号以外の記号（中が空白でないもの・より文字に近いもの）の効果を知ることを目的としている。中が空白でないものにしたのは，中が空白だと空欄と認識しやすいからである。また，６年生においては，文章題おける関係把握と図表示との関連性，子どもはどのような図をかいて関係を把握するのか，を知ることを目的としている。

５年生の調査において，次のようにグループ分けをしている。

Ａグループ（81 名）　…　□や○以外の記号を用いる。
Ｂグループ（82 名）　…　□と○を用いる。

調査内容は次の通りである。

＜5 年生Ａグループ＞

１．　かつし君は，はじめに３００円持っていました。お父さんに３００円もらいました。かつし君はそれらのお金を持って，スーパーに買い物に行きました。スーパーで，ペンを２本と，ノートを１冊買いました。ペン１本の値段は１８０円で，ノート１冊の値段は１３０円です。かつし君はあといくら持っていますか。

式と答えをかきなさい。ただし，式は１つの式でかきなさい。

２．　かつし君は，はじめにいくらか持っていました。お母さんに２００円もらいました。かつし君はそれらのお金を持って，コンビニに買い物に行きました。コンビニで，スナック菓子を３つと，ジュースを１本買ったところ，かつし君の持っているお金の残りは１９０円になりました。スナック菓子の値段はいくらか分かりませんが，ジュース１本の値段は１５０円です。

かつし君がはじめに持っていたお金を㊎円，スナック菓子の値段を㋜円として，１つの式に表しなさい。

※　式だけでいいです。

<５年生Ｂグループ>

１．　かつし君は，はじめに３００円持っていました。お父さんに３００円もらいました。かつし君はそれらのお金を持って，スーパーに買い物に行きました。スーパーで，ペンを２本と，ノートを１冊買いました。ペン１本の値段は１８０円で，ノート１冊の値段は１３０円です。かつし君はあといくら持っていますか。

　式と答えをかきなさい。ただし，式は１つの式でかきなさい。

２．　かつし君は，はじめにいくらか持っていました。お母さんに２００円もらいました。かつし君はそれらのお金を持って，コンビニに買い物に行きました。コンビニで，スナック菓子を３つと，ジュースを１本買ったところ，かつし君の持っているお金の残りは１９０円になりました。スナック菓子の値段はいくらか分かりませんが，ジュース１本の値段は１５０円です。

　かつし君がはじめに持っていたお金を□円，スナック菓子の値段を○円として，１つの式に表しなさい。

※　式だけでいいです。

<６年生>

１．　かつし君は，はじめに３００円持っていました。お父さんに３００円もらいました。かつし君はそれらのお金を持って，スーパーに買い物に行きました。スーパーで，ペンを２本と，ノートを１冊買いました。ノート１冊の値段は１３０円で，ペン１本の値段はノート１冊の値段よりも５０円高いそうです。かつし君はあといくら持っていますか。

　まず，（必ず）図をかき，そのあと，式と答えをかきなさい。ただし，式は１つの式でかきなさい。

２．　かつし君は，はじめに４５０円持っていました。お母さんに１５０円もらいました。かつし君はそれらのお金を持って，コンビニに買い物に行きました。コンビニで，スナック菓子を３つと，ジュースを１本買ったところ，かつし君の持っているお金の残りは６０円になりました。スナック菓子の値段はいくらか分かりませんが，ジュース１本の値段は１５０円です。

　スナック菓子の値段を□円として，まず図をかき，そのあと１つの式に表しなさい。

※　式だけでいいです。

第２節　調査の結果とその考察

調査における問題の模範解答は，次の通りである。

＜5年生Aグループに対する問題の解答＞

1．(300＋300) － (180×2＋130) ＝110　　　答え　110円

2．㊎＋200－ (㋜×3＋150) ＝190

＜5年生Bグループに対する問題の解答＞

1．(300＋300) － (180×2＋130) ＝110　　　答え　110円

2．□＋200－ (○×3＋150) ＝190

＜6年生に対する問題の解答＞

1．(300＋300) － (180×2＋130) ＝110　　　答え　110円

2．(450＋150) － (□×3＋150) ＝60

上の解答は一例である。上のほかにも式が正しいものは正解とした。また，6年生の問題において，図については問題場面が正確に表されているものであれば正解とした。

ここで，児童の解答の分類を次のようにした。

＜5年生Aグループ＞　　※　問2についての分類

タイプⅠa　…　問2正解

タイプⅡa　…　㊎＋200と㋜×3の両方の表現ができている。

タイプⅢa　…　上の2つのうち，どちらか片方の表現ができている。

＜5年生Bグループ＞　　※　問2についての分類

タイプⅠb　…　問2正解

タイプⅡb　…　□＋200と○×3の両方の表現ができている。

タイプⅢb　…　上の2つのうち，どちらか片方の表現ができている。

<6年生>　※ 問1，2両方についての分類

タイプⅠ … 図，式ともに正解

タイプⅡ … 図は正解だが，式は不正解

タイプⅢ … 図がないまたは図が不正解だが，式は正解

タイプⅣ … 図，式ともに不正解

結果は次の通りになった。

	人数（名）（全体比（%））
問1正解	50（62）
タイプⅠa	11（14）
タイプⅡa	14（17）
タイプⅢa	10（12）

5年生Aグループ

	人数（名）（全体比（%））
問1正解	60（73）
タイプⅠb	6（7）
タイプⅡb	20（24）
タイプⅢb	14（17）

5年生Bグループ

	人数（名）（全体比（%））
タイプⅠ	71（57）
タイプⅡ	7（6）
タイプⅢ	12（10）
タイプⅣ	35（28）

6年生：問1

	人数（名）（全体比（%））
タイプⅠ	31（25）
タイプⅡ	16（13）
タイプⅢ	12（10）
タイプⅣ	66（53）

6年生：問2

5年生における調査について，以上のような結果が出たのだが，2つのグループにおける問2のタイプⅠaとタイプⅡaをあわせた人数と，タイプⅠbとタイプⅡbをあわせた人数を比較してみるとほぼ同数である。しかし，現在の算数においては，□や○が使われており，それは今回調査を行ったA小学校においても同様である。そう考えると，□や○の方が慣れているはずである。それにもかかわらず同数であるということは，やはり□や○などの中が，空白の記号よりもそれ以外の中が空白でない，より文字に近い記号の方が子どもにとっては式表現・立式がしやすいではないだろうかと考える。それは，Aグループの問1正解者62%から問2正解者14%へのダウンと，Bグループの問1正解者73%から問2正解者7%へのダウンを比べてみても分かるであろう。

また特に，タイプⅠaとタイプⅠbを比較してみると，大きな差が出ている。これは，□や○よりもAグループで用いたような囲い文字の方が関係を見やすいためであると考えられる。つまり，囲い文字は明確な意味を持っているので，それが何を表しているのか理解しやすく，（等）式全体を見やすいと考えられるのである。ということは，文章題の関係を明確にし，それを式化する際には，□などの記号よりも囲い文字の方が有効であると判断できる。しかし，囲い文字を用いた場合にそれを子どもはどう認識しているのか（決まった数と見ているのか，一般数と見ているのか）が疑問点になる。それは，タイプⅡaとタイプⅢaをあわせた人数と，タイプⅡbとタイプⅢbをあわせた人数を比較して後者の方が多かったことを見ても考えられる点である。よって，このことを調べる必要があるが，それは今後の課題としたい。

また，また問2の不正解者の中で次の2つの特徴が多く見られた。

① 記号を全く使っていない。
② 等式を立てられていない。

②については，タイプⅡa・タイプⅡbの児童によくみられたものである。つまり，次のような解答が多かったのである。

㊎＋200－（ス×3＋150）　または　㊎＋200－ス×3－150

□＋200－（○×3＋150）　または　□＋200－○×3－150

これは，等式の概念が理解されていないことが原因ではないかと考える。やはり，第1章で述べたとおり，等式に関する指導が不十分であると考えられる。

続いて，6年生における調査について結果を見ると，問1・問2ともに正解者の多くはきちんと図がかけていた。つまり関係把握ができていたことになる。それに対して，不正解者の多くは図をかかなかったか図が間違っていたのである。つまり関係把握ができていな

かったと考えられる。

前述の通り，式表現・文章題における関係把握の重要性が示されたことになり，また関係把握において図表示が重要な役割を担っていることが明らかとなった。それは，□を用いた文章題であっても例外ではない。しかし，問1･問2ともにタイプⅡの児童が数名いる。これは，図から思考まで発展しきれなかったことが1つの原因であると考えられ，図のみではいけないことも明らかとなった。

ところで，図表示について今回の調査結果で気になった点がある。それは，子どもの図に情景図が非常に多く，線分図が少ないということである。上の調査結果の表には載せていないが，問1では図表示ができていた児童78名のうち59名（約76%）が，問2では図表示ができていた児童47名のうち33名（約70%）が情景図（絵）をかいていたのである。また，線分図をかいていたのは，問1では12名（約15%），問2では8名（約17%）だけであったのである。子どもにとって情景図が分かりやすいのは，前述の通りであるが，線分図がこんなにも少ないのは線分図が分からないのか，線分図に慣れていないのかはっきりとはしていないが，どちらにせよこのような状態でいきなり中学校数学の中で線分図を多く使われても，子どもが理解しにくいのは当然ではないかと思われる。やはり，図においても，算数‐数学のつながりを考え直す必要があるであろう。しかし，それは今後の課題としたい。

また，問2において，式が間違っていた児童の多くが，□を使った式を書くように指示されているにもかかわらず□を全く使わず，直接□に入る数を求めようとしている（□に入る数は求められるのだが…）。これは，やはり□には数が入るということが子どもの頭の中で強調されているためではないかと考えられる。

最後に，5年生・6年生両方の調査結果についてだが，今回の調査では問1，問2ともに同じような場面を設定している。つまり形的には同じ式が立てられるのである。しかし，記号を使った式になると正解率がかなり下がっている。このままで，中学校数学に移行していってもつまずくのは明らかであろう。よって，算数における記号を使った式表現の教育内容を見つめ直す必要があると考える。

今回の調査は今後の研究の基盤としていきたい。

研究の総括

認識調査の結果から，子どもの関係把握，特に等しい関係に対する理解度が低いことが分かった。しかし，この点は現在使われている教科書を見てみる限り予想できたことである。この結果をもとに，今後，式指導・文章題指導において関係，特に「等しい関係」を見抜くことに重点を置いた指導が重要である。また，関係把握において（具体的）操作（現行の指導要領から「算数的活動」というものも出てきた）が有効であることも示したが，具体的操作だけでは「関係把握」とはならず，あくまでも思考における「関係把握」が必要なのである。式指導・文章題指導だけに限らず，すべての学習内容において，（具体的）操作は思考の手助けに過ぎないことを指導者は理解しておくべきであろう。

□などの記号に関しては，小学校 1 年生の段階から計算の答えを書く空欄のような用い方は不適切であると判断した。また，変数・未知数・一般数の使い分けも必要である。その際に，記号を 1 つの数とみなければならない場面も数多く出てくるはずであるので，それにはやはり，□のみでは不十分であると考えられ，本稿で提案した囲い文字もしくはそれ以外の（より文字に近い）記号の使用も有効であると考えられる。しかし，それらの採用において，本章第 2 節でも挙げるが，それらの記号に対する子どもの認識の調査も必要であることを注意しておく。

以上のように，関係把握と記号を用いた式に対する理解が小学校の期間に定着できていれば，中学校における「文字を使った式」も理解しやすくなると結論づけたい。

今後の課題

以上が研究の内容であるが，以下の点を今後の課題として残しておく。

○ 囲い文字，より文字に近い記号に対する子どもの認識の実態調査

○ □，囲い文字，より文字に近い記号を用いた式（フレーズ型）に対する子どもの認識の実態調査

○ 図表示，特に線分図に対する子どもの理解度・認識の実態調査

○ 研究内容をもとにした教育内容の構築と実践

謝辞

最後になりましたが，本研究を進めるにあたり，お世話になった方々にお礼を申し上げます。まず，大阪教育大学教育学部 狭間節子教授には研究全般にわたりお世話になりました。1年間，終始あたたかいご指導と激励を賜りました。心から感謝の意を表します。

また，私の代数学ゼミの指導教官である大阪教育大学教育学部 馬場良始助教授には本研究についていくつかの指摘をいただきました。深くお礼申し上げます。

今回，本研究を進めるにあたり，認識調査に協力してくださったＡ小学校の先生方，そして5，6年生の児童たちにも感謝の意を表したいと思います。

最後に，これまで私をあたたかく応援し支え続けてくれた両親に心から感謝します。

2005年3月

三浦　勝志