

馬場ゼミでの研究を振り返って今に活かされること

2000 年度馬場ゼミ生 森本貴彦

本文章作成にあたって

大阪教育大学・大学院に入学しようと考えている皆さんの多くは、将来教師になるという目標を持たれていると思います。私も平成9年、教師になるという目標を持って大阪教育大学に入学しました。現在は高等学校の教師として教壇に立っています。本稿では、私が4回生のときに馬場ゼミで学んだことが、現在の教師生活にどのように活かされているかについて、次の3点にしぼって述べたいと思います。

数学の教師として必要なこと
ゼミで学んだことと教師として活かされていること
ゼミで学んだことと実際の取り組み

数学の教師として必要なこと

みなさんが教師で、生徒にベクトルの内積について次のような質問をされたらしたら、どのように答えるかを考えてみてください。

「先生は授業で、 \vec{a} と \vec{b} のなす角が θ のとき、 $|\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \cos \theta$ を『 \vec{a} と \vec{b} の内積』と呼び、それを $\vec{a} \cdot \vec{b}$ で表すと教えてくれたよね。でも、これまでの積みたいに $|\vec{a}| \times |\vec{b}|$ をそんなふうに呼んだり、そんなふうに表したりしちゃいけないの？」

この生徒の質問に対しては、「内積の定義はそれとは違うからダメだよ」や「2つのベクトルの向きを同じ方向にしなければならぬので、 $|\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \cos \theta$ としないとダメだよ」という答え方が一般的であると思います。けれども、生徒に数学的な考え方を身につけさせるという観点から考えると、私はこの質問に対して、「演算とは何か」「ベクトルとは何か」「ベクトルの内積を $|\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \cos \theta$ と定義することの良さは何か」等をふまえて、次のように答えるのが妥当ではないかと考えています。

「これまでに勉強してきた加法・減法・乗法・除法は、『演算』と呼ばれるものなんだ。『内積』もまた、『演算』のひとつなんだよ。『演算』というのは、2つのもの、『内積』の場合であれば \vec{a} と \vec{b} 、に対して何か1つ値を定めたものなんだ。だから、 \vec{a} と \vec{b} に対して $|\vec{a}| \times |\vec{b}|$ という値を定めることにして、それを『 \vec{a} と \vec{b} の内積』と呼び、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ と表してもかまわないよ。でも、教科書や今までの授業では、 $|\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \cos \theta$

という値を定めるものを『 \vec{a} と \vec{b} の内積』と呼んできたよね。だから、もし君が今考えているものも、同じ『内積』という言葉で呼ぶなら、今まで習ってきた『内積』との区別が無くなり、どちらが本当の『内積』なのか分からなくなってしまうよね。だから、もしそのような演算を考えたいのであれば、それは『内積』とは違った新しい名前前で呼んで、例えば $\vec{a} * \vec{b}$ のように表して使ったらどうかな。ただ、新しい名前を付けたりする価値や必要性があるかどうかはチェックしないとね。

ベクトルには、絶対値だけじゃなくて『向き』もあったよね。 $|\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \cos \theta$ は、 $|\vec{a}|$ と、 \vec{b} のベクトル成分のうち \vec{a} と同じ向きの成分 $|\vec{b}| \times \cos \theta$ との積、と考えることができるんだ。そしてこの概念はベクトルの理論を考える上では、とっても大切なんだよ。だから $|\vec{a}| \times |\vec{b}| \times \cos \theta$ をわざわざ『内積』なんていう名前を付けて勉強するんだ。」

この答え方は、私が学生時代にある先生から伺ったものです。私は、このように答えることができる教師を理想とし、また、数学の教師ならば、当然このような答え方ができるようになるべきであると思っています。

では、このように答えられるために、数学の教師は一体どのような知識・教養を持っていなければならないのでしょうか。それは、第一に専門数学だと私は思います。前述の例であれば、教師は、演算やベクトル（の内積）が専門数学ではどのように定義され、どのように用いられているのかを理解する必要があります。

皆さんの中には、教育現場に立ったときすぐに役立つように、算数・数学の（自分なりの）指導法を大学時代に確立しておきたい、と考えている方がいるかもしれません。しかし、そのようなことは可能なのでしょうか。私は、先輩の先生に、「教師が自分の指導法を確立するまでには10年かかる。10年かかって確立したと思っても、生徒が変われば指導法も変わる。指導法は奥が深いよ」と教わったことがあります。指導法とは、生徒を前にして生徒から学ぶものであって、教師になるまでに（自分なりの）算数・数学の指導法を確立することは難しいと私は思います。教師になった後、自分なりの指導法を確立し、さらにその指導法を生徒に合わせて発展させるためにも、教師には専門数学の知識が必要なのではないでしょうか。

ゼミで学んだことと教師として活かされていること

私は馬場ゼミで1年間研究をして、特に「代数学(専門数学)」「数学の専門書の読み方」「数学的な考え方」の3点を学んだと思います。この3点について詳しく述べてみたいと思います。

私は、ゼミで主に加群 (module) に関する様々な定理や性質の、カテゴリー論を用いた証明およびカテゴリー論独自の性質について研究しました。よって、群・環・体・加群・写像については、専門書のある程度読めるくらいの知識は得られたと思います。また、大阪教育大学では、代数学・幾何学・解析学・確率統計学などの専門数学の一

般的知識を学ぶことができる講義があったので、代数学以外の分野についてもある程度の知識が得られたと思います。さらに、卒業論文は代数学の専門書をまとめたので、「一行一行細かく読むこと」や「行間を読み、曖昧だと感じるところは証明すること」など、数学の専門書の読み方も学びました。そして、「定義や定理からイメージを持ち、そのイメージから、定理や命題などの証明や新たな定理を生み出す」という数学的な考え方も、毎回のゼミ発表から学びました。

このように、ゼミで学んだことは、教師となった現在も教材研究や授業の構成を考える際に活かされています。次にその例を示します。

私は、数を実数まで拡張する部分（数学）で、「方程式が解ける(解が存在する)」という視点から数の世界を拡張させ、演算が「閉じている」のか「閉じていない」のかを検証させる授業を行いました。この教材の準備には、群・環・体の知識が役立っています。この授業は、ゼミで学んだ「イメージを持ち、そのイメージから新たな世界を生み出す」という数学的な考え方を生徒にも感じてもらうことと、さらに「方程式が解ける(解が存在する)」ことを使って、その後導入しなくてはならない複素数への拡張を自然に導く、ということ意識した授業になっています。このように、自分が体得した数学の知識を、高等学校の指導内容に自分なりのつながりを持たせること（つまり、ゼミで学んだことを活かすこと）によって、生徒に数学的な考え方を感じさせることができるように思います。

皆さんは、数学の教師は教科書の内容を単に教えていけばよいと思いますか。数学の教師は、教科書に載っている定義や定理などの裏に隠されている、数学的に重要な内容を読み取り、それを生徒自身が興味・関心を持てるように工夫して授業を行う必要があると思います。その工夫をする際に、ゼミで学んだことが活かされています。

ゼミで学んだことと実際の取り組み

次に、ゼミで学んだことと実際の私の取り組みについて述べたいと思います。

私は、生徒が試験の答案やノートに論理的な記述ができていないことに問題意識を持っており、「生徒の記述力育成を目指した授業構成」を研究課題として授業を行っています。この課題に対して、1 学期では「自分で考え、その考えを表現できること」、2 学期では「自分で数学的に正しいか正しくないかを判断し、その理由を説明できること」、3 学期では「数学的に正しいか正しくないかの説明を論理的に記述できること」を目標として授業を構成しています。このような授業を行うためには、これまでになく教材を開発したり、既存の教材を再研究したりする必要があります。例えば、1 学期では、テクノロジーを用いたり数学史を取り入れたりしたのですが、その際に、ゼミで学んだ数学の専門書の読み方や、専門数学の一般的な知識が活かされています。

ここで、テクノロジーを用いて、生徒が自ら考え、その考えを表現できるように構成した授業の指導案を例示したいと思います。この授業は、2 次関数の 2 時間目で、(関数の定義と、 $y=ax^2$ の諸性質については既習の) 高校 1 年生を対象としたものです。

授業の目標は、「関数の『対応』と『変化』を理解すること」と「2次関数で平行移動するときの式とグラフの関係を理解すること」の2点です。授業環境としては、教師用のパソコン画面をプロジェクターでスクリーンに映し出せるようにしてあり、さらに各生徒に1台ずつパソコンを使わせています。授業形態が『一斉』のときは、スクリーンに映し出した画面を見せながら授業を行い、『個別』のときは各自のパソコンで作業させます。なお、ここで使用している関数ソフト「Grapes」は、大阪教育大学附属池田高等学校の友田勝久先生の作られたフリーソフトウェアです。詳細は

<http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/index.html>

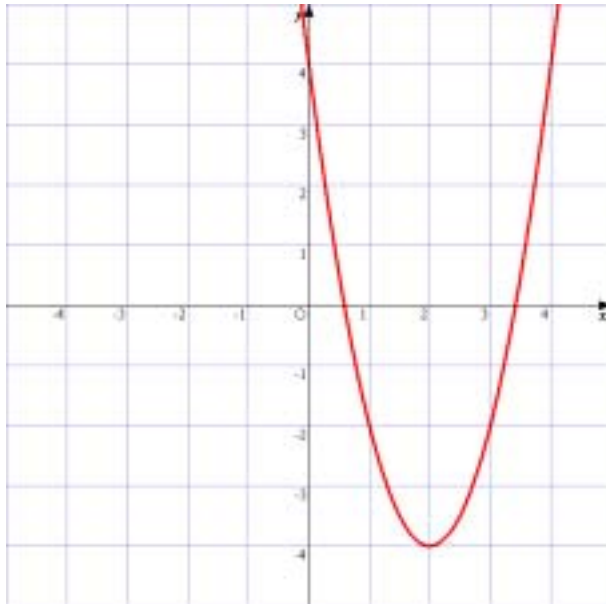
をご参照ください。

展開	学習内容	生徒の活動	授業形態	留意点 評価
導入	1次関数のグラフ	1次関数のグラフの特徴と平行移動を復習する。	一斉	$y=ax+1$ で1次関数の性質を復習する。 $y=2x+1$ の平行移動を示す。 生徒に推測させる。 Grapes を用いる。
展開	2次関数のグラフの特徴	2次関数 $y=ax^2$ のグラフの特徴を Grapes を用いて確認する。 2次関数 $y=ax^2$ のグラフの特徴を発表させる。	個別 一斉	Grapes で、 $y=ax^2$ の a を変化させ、特徴を書かせる。 軸・頂点を確認させる。 Grapes で、 $y=ax^2$ の a を変化させながら、発表させる。 上に凸、下に凸を確認。
	2次関数のグラフの平行移動	問題1を解く。 Grapes で示しながら考えを発表する。 $y=ax^2+q$ 、 $y=a(x-p)^2$ 、 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフを確認する。	個別 一斉	プリントと同じグラフを描くために、試行錯誤させる。 随時発表させて、他の生徒は Grapes で確認する。 式とグラフの関係を意識させる。 x 軸方向、 y 軸方向の移動で確認する。 頂点、軸の移動を確認する。
まとめ	2次関数のグラフ	式とグラフの関係を確認する。	一斉	平行移動後の式とグラフの関係を再度確認する。 教科書の問題を宿題とする。

問題 1

下のグラフと同じグラフを描く。

$y=ax^2$ のグラフをどのようにすればよいか。



この授業では、生徒が、関数ソフトを使って自ら2次関数の性質や2次関数の式とグラフの関係を見出し、さらにそれを発表することで自分の考え方を表現することを学びます。私はこの授業を構成する際に、「関数は写像であること」、「グラフは関数の対応を座標平面上に表したものであること」、「関数のグラフの平行移動は、後に出てくる合成関数・合成写像につながる考え方であること」、「1次関数には線形性があるが、2次関数には線形性がないこと」といった教材研究を行いました。この教材研究を行うときに、ゼミで学んだ「写像」に関する知識が、関数に関する専門的な文献を読むときに、前述した専門書の読み方がそれぞれ活かされています。そして何より、専門数学の知識を活かすことで、教科書の行間にはこれらの内容が隠されているということを読み取ることができます。また、この授業展開で最も重要なことは、生徒の自由な発言にうまく対応することです。私は、この授業の中で「関数の線形性」、「関数の写像的な側面」、「関数の変化」といったことに関連する生徒の発言に注意し、同時に生徒がこれらの考え方を学び取ることができるように進めました。ここでも、専門数学の知識が要求されると私は思います。

最後に

これまで長々と述べてきましたが、私が考える数学の教師として最も求められる能力は、「専門数学の力」であると思います。そのために、大学・大学院で専門数学を勉強する必要があると思います。ゼミはその機会や時間を十分に与えてくれますし、十分に身につけさせてくれると思います。みなさんも大阪教育大学・大学院に入学し、ゼミで研究を行ってみてはどうでしょうか。