２次方程式の解の公式について

瀬尾祐貴　　中村知隆
芝浦工業大学工学部　　芝浦工業大学工学部電子工学科

要旨　本稿の目的は、芝浦工業大学の教職科目「数学科指導法」における学生の模擬授業の実際の取り組みをもとに、中学校・高等学校の数学の授業における「2 次方程式」の分野をもとに考察をしたことの報告である。

検索語　2 次方程式の解の公式　数学科学習指導案　一般化の考え方

１．はじめに

本稿の目的は、本学の教職科目「数学科指導法」における学生の模擬授業の実際の取り組みをもとに、中学校・高等学校の数学の授業における「2 次方程式」について、具体的課題をもとに分析・考察をしたことの報告です。今回の授業テーマを、数学Ⅰの「2 次方程式」にしました。旧学習指導要領では、中学校数学から「2 次方程式の解の公式」は削除され、高校数学に移されました。中学生にとって、解の公式を学ぶことは負担が大きく、ただ公式に代入するだけでは数学を学んでいることにならないといった理由からでしょうか。中学生の段階では、因数分解による解法や簡単な平方完成でできるものだけで十分だという判断でしょうか。しかし、多くの数学者や数学教育学者、そして現場の中学校の数学教師の生徒の学力不足を懸念する声の大きさゆえか、新学習指導要領に移行する前に、実際新学習指導要領は平成 24 年度から実施予定ですが、教科書では発展学習のところで、あたかも高校数学のような体裁で、解の公式のきちんとした証明が載せられています。若いまじめな数学教師はこれを見れば、是非生徒たちに「きちん」と教えなければいけないだろうと思いそうです。

ここで、少し問題意識をはっきりさせるために、教科書にある「2 次方程式の解の公式」の部分を復習しましょう。

ここでは、数研出版「数学Ⅰ」（平成 14 年 2 月 10 日検定済み）を参考にします。

例 31 と同様な方法で、一般の 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の解を求めてみましょう。

定数項を右辺に移行して

$$ax^2 + bx = -c$$

両辺をa で割ると

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

両辺にx の係数の半分の 2 乗を加えると

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

よって、左辺を平方の形にすると

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \cdots ①$$

$b^2 - 4ac \geqq 0$のとき、①の右辺は正または 0 であるから

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

この式の右辺は、a の正負にかかわらず、

$$\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

となるから

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

したがって、次の解の公式が得られる。

2 次方程式の解の公式

2 次方程式$ax^2+bx+c=0$ の解は、

$b^2-4ac \geqq 0$ のとき、

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

わずか、1 ページほどの証明です。丁寧に指導すれば、生徒はよくわかってくれるだろう、と考えたくなります。それとも、中学校で学んでいるから、結果だけで十分でしょうか？しかし、旧学習指導要領では、解の公式は中学校で原則として教えませんから、高等学校で初めて教えなければいけません。こういう時に、少し上の求め方を意識的に解きほぐすことが大切です。わずか、1 ページにも満たない証明の中で、多くの数学的事実が利用されていることが分かります。順番に見て行きましょう。

（1）2 次方程式$ax^2+bx+c=0$ ということで、$a\neq 0$ が前提とされています。勿論、その前にこの仮定は教科書にはきちんと書かれています。しかし、だからと言って、この暗黙の了解は生徒には難しいです。教師が指摘すると、「あっ」と生徒は気付きますが、そこまで用心深い生徒はそう多くはいません。

（2）次は、文字式を含んだ平方完成をしなければなりません。教科書は、その前のところで、具体的な実例を簡単に紹介しています。一般化を行う前の具体化です。数の場合の状況を比較することで、一般化をよりスムーズにしようという配慮のように見えます。しかし、例 31 は、x^2 の係数は 1 であり、b=10、c=13 のケースです。解の公式は勿論、$a\neq 0$ で、$a=1$ のケースではありません。それが、一気に文字式での平方完成に向かっている。

（3）そして、そのあと、文字の計算は分数式の計算をしなければいけません。では、この「数学Ⅰ」の教科書でそれまでに、分数式の計算が載っているのかといえば、一切記載されていません。ここで初めて、分数式の計算をしていることになります。しかも、よく見ればわかるように、この分数式の引き算は分母が違っています。文字式での通分をし、文字式の最小公倍数を求め、通分して計算をしなければいけない。小学校段階で分数の計算に後れを取っている生徒にはかなり厳しい計算だとわかる。それが、まったく何の説明もなく、さわやかに簡単なことのように記述されています。勿論、それは教師がその時々に応じてフォローしなさいということでしょうが、それにしてもかなり厄介な式変形であると指摘されれば、そうだなとは理解されると思います。

（4）文字を含んだ根号の扱いが出てきます。高校生でも、大学生でも、$\sqrt{a^2}$ の扱いにてこずります。はじめから、きちんと書ける生徒はあまりいません。文字を含んだ根号の計算がほとんど出てこないからです。

（5）「a の正負にかかわらず、」と教科書にありますが、本当でしょうか？a の正負によって、$\sqrt{a^2}$ の式は変わります。それに、数式の前の複号±の記号の意味は？

以上のように見て行きますと、この簡単な証明の中に数学での基本事項がたくさん詰まっていることが分かりますし、そのどれも、数学的に理解が進んでいない生徒には難解だろうと推察されます。勢い、高校の先生方は、時間もないことですし、「これは公式だから結果だけを利用できるように」という指導にならざるをえません。仕方がないでしょう。これを中学校数学で「解の公式」を勉強せず、高校数学で初めて学ぶとすると、その証明まで理解しようとするとそれは大変なことになると分かります。従って、20 年前の学習指導要領のように、中学校で「解の公式」の利用を学び、高校でその証明を理解しようとするスパイラル方式は理にかなっていると思います。

いずれにしても、「解の公式」をどう学校数学の中に位置づけるのかは難しい問題があります。学生たちにはそのような状況を説明し、その上で、この個所を模擬授業してくださいとお願いします。そして、教員側の思いとしては、解の公式を導くだけでもこれだけのことを考え、それをどうフォローするのか、かなり工夫の余地があることを理解してもらいたく、ここを学生に模擬授業させようと思いました。

本学での模擬授業の実際を少しだけ補足します。模擬授業の実際は、多くの学生にそれぞれのテーマを与えて、約 20 分から 30 分模擬授業をさせます。そして、授業者以外の他の学生はみな生徒役です。高校数学の内容ですので、すらすらと正解を答えてしまう学生が大半ですが、時には、まさに現役の高校生が間違えそうな誤答を答えようとする学生もいます。そのあたりは、模擬授業者との対応は大変興味深いものがあります。終了後、学生の作成した指導案をもとに、その授業の導入の考え方や授業の進め方などを他の学生とともに協議します。従って、「2 次方程式」の部分を担当する学生は、それ以前に、他の学生の模擬授業をみていることになります。

２．実践例

では、どういった実践を行うのか？大変興味深いところですが、予定の枚数が来てしまいました。この続きは、別の機会に行いたいと思います。ぜひ、自分なりの方法で、よい導入を考える契機になればと思います。

引用・参考文献

（1）片桐重男：数学的な考え方の具体化と指導, 明治図書, 2004

（2）福原公雄：中学校　若い数学の先生に,　黎明書房, 1986